빠른정답

1-1	①	1-2	⑤	2-1	13	2-2	3	3-1	20	3-2	18
4-1	105	4-2	38	5-1	93	5-2	496	6-1	13	6-2	9명
7-1	④	7-2	15	8-1	④	8-2	⑤	9-1	15	9-2	12
10-1	④	10-2	46	11-1	③	11-2	47	12-1	④	12-2	ㄴ, ㄷ
13-1	128	13-2	16	14-1	7	14-2	11	15-1	28	15-2	64
16-1	②	16-2	①	17-1	39	17-2	26	18-1	127	18-2	255
19-1	12	19-2	12	20-1	④	20-2	25	21-1	8	21-2	15
22-1	16	22-2	16	23-1	33	23-2	12 명	24-1	⑤	24-2	6, 12
25-1	③	25-2	32개	26-1	62	26-2	33	27-1	④	27-2	16
28-1	②	28-2	85	29-1	②	29-2	27	30-1	144	30-2	$\frac{31}{16}$
31-1	④	31-2	62	32-1	10	32-2	2	33-1	③	33-2	84
34-1	①	34-2	49, 3	35-1	②	35-2	9	36-1	②	36-2	27
37-1	22	37-2	220	38-1	③	38-2	⑤	39-1	63	39-2	88
40-1	11	40-2	17	41-1	②	41-2	30	42-1	⑤	42-2	18
43-1	③	43-2	②	44-1	③	44-2	ㄱ, ㄴ	45-1	②	45-2	56
46-1	③	46-2	ㄴ, ㄷ	47-1	④	47-2	③	48-1	④	48-2	13
49-1	⑤	49-2	⑤	50-1	256	50-2	9	51-1	②	51-2	12 개
52-1	28	52-2	14	53-1	26	53-2	14	54-1	①	54-2	19개
55-1	③	55-2	⑤	56-1	②	56-2	②	57-1	④	57-2	④
58-1	40	58-2	$4\sqrt{13}$	59-1	⑤	59-2	$\frac{25x+12y}{12}$	60-1	⑤	60-2	3개
61-1	⑤	61-2	ㄱ, ㄴ	62-1	⑤	62-2	풀이참조	63-1	⑤	63-2	풀이참조
64-1	②	64-2	④	65-1	③	65-2	ㄱ, ㄴ	66-1	21	66-2	-4
67-1	16	67-2	12, $ac=2$	68-1	25	68-2	⑤	69-1	23	69-2	31
70-1	80	70-2	20	71-1	②	71-2	8	72-1	①	72-2	$\frac{1+2a}{2+\sqrt{3}}$
73-1	⑤	73-2	ㄱ, ㄴ, ㄷ	74-1	10	74-2	54	75-1	9	75-2	$\frac{50}{3}$
76-1	④	76-2	④	77-1	④	77-2	10	78-1	②	78-2	$\sqrt{14}$
79-1	④	79-2	5	80-1	④	80-2	8	81-1	⑤	81-2	199
82-1	②	82-2	ㄱ, ㄴ, ㄷ	83-1	②	83-2	ㄱ	84-1	③	84-2	ㄱ
85-1	25	85-2	120	86-1	③	86-2	1	87-1	③	87-2	ㄴ, ㄷ
88-1	5	88-2	5	89-1	172	89-2	551	90-1	7	90-2	2
91-1	④	91-2	12	92-1	12	92-2	12	93-1	③	93-2	3
94-1	33	94-2	21	95-1	⑤	95-2	10	96-1	7	96-2	4
97-1	④	97-2	④	98-1	17	98-2	2	99-1	⑤	99-2	ㄱ, ㄴ, ㅁ
100-1	②	100-2	1								

01. 집합

01-1 ①

① $A * U = (A \cap U) \cup (A \cup U)^c = A \cup \phi = A$

② $B * A = (B \cap A) \cup (B \cup A)^c$이므로 $A * B = B * A$

③ $A * \varnothing = (A \cap \varnothing) \cup (A \cup \varnothing)^c = \varnothing \cup A^c = A^c$

④ $A^c * B^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cup B^c)^c$
$= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) = A * B$

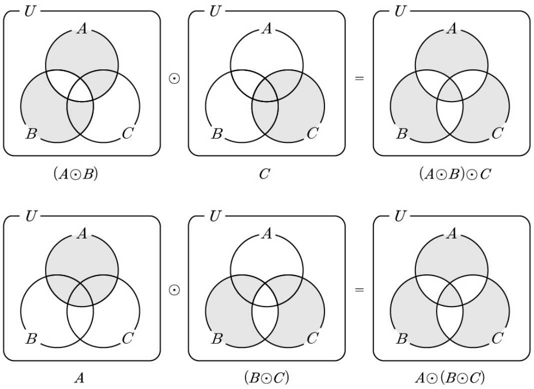
⑤ $A * A^c = (A \cap A^c) \cup (A \cup A^c)^c = \varnothing \cup U^c = \varnothing$

01-2 ⑤

$A \odot B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$
$= (A \cup B) - (A \cap B)$

ㄱ. $A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A)$
$= B \odot A$ (참)

ㄴ. $(A \odot B) \odot C$와 $A \odot (B \odot C)$를 각각 벤다이어그램으로 나타내면 아래와 같다.



$(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$ (참)

ㄷ. $A \odot A^C = (A \cup A^C) - (A \cap A^C) = U - \varnothing = U$ (거짓)

ㄹ. $A \odot U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^C$ (참)

ㅁ. $A^C \odot B^C = (A^C \cup B^C) - (A^C \cap B^C)$
$= (A \cap B)^C - (A \cup B)^C$
$= (A \cap B)^C \cap (A \cup B)$
$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$
$= A \odot B$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

02-1 13

모아야 할 20종류의 스티커의 집합을 U라 하고, 갑, 을, 병이 모은 스티커의 종류의 집합을 A, B, C라 하면

$n(U) = 20$, $n(A) = 4$, $n(B) = 5$, $n(C) = 5$

$n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(C \cap A) = 3$

$n(A \cap B \cap C) = 2$

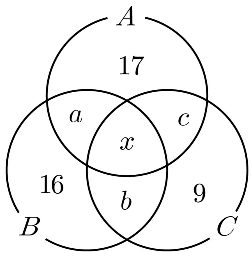
$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$
$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$
$+ n(A \cap B \cap C)$
$= 4 + 5 + 5 - 3 - 3 - 3 + 2 = 7$

따라서, 더 모아야 할 스티커의 수는 $20 - 7 = 13$(개)

02-2 3

상의를 교환한 학생들의 집합을 A,
하의를 교환한 학생들의 집합을 B,
스타킹을 교환한 학생들의 집합을 C라 하면

$n(A \cup B \cup C) = 73$, $n(A) = 42$, $n(B) = 37$, $n(C) = 28$



$a + b + c + x = 31$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$73 = 42 + 37 + 28 - (a + x) - (b + x) - (c + x) + x$

$\therefore x = 3$

03-1 20

6의 배수는 2와 3의 공배수이므로 두 원소의 곱이 6의 배수가 아닌 원소들로만 이루어진 집합은 집합에 2의 배수가 포함되면 3의 배수는 원소가 될 수 없고, 3의 배수가 포함되면 2의 배수는 원소가 될 수 없다.
그러므로 2의 배수를 포함하고 3의 배수가 포함되지 않는 집합이 원소의 개수가 많으므로 집합 M은 3의 배수를 제외한 나머지 원소들을 갖는 집합이다. 따라서, 원소의 개수는 $30 - 10 = 20$이다.

03-2 18

$(A \cup B) \cap A^C = (A \cup B) - A = B - A$이다.
$A - B = \{1, 2, 4, 8\}$, $B - A = \{3, 6, 9\}$이므로 남은 원소는 5, 7, 10으로 3개이다.
$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$이므로 그 원소의 개수가 최대이려면 $n(A \cap B)$가 최소이면 된다. 그때의 값은 0이다.
따라서 이 조건을 만족하는 집합 $B = \{3, 6, 9\}$로 모두 더하면 18이다.

04-1 105

-2를 포함하는 원소가 세 개인 부분집합의 개수는 15개이므로 -2는 15번 더해진다. 다른 6개의 원소에 대해서도 같은 방법으로 생각하면 모두 15번 더해지므로 구하는 합은
$S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = 15(-2 - 1 + 1 + 2 + 3 + 4) = 105$

04-2 38

공집합을 제외한 집합 A의 진부분집합의 개수는 $2^5-2=30$

$\therefore\ n=30$

3을 반드시 포함하는 집합 A의 진부분집합의 개수는 2^4-1개

4를 반드시 포함하는 집합 A의 진부분집합의 개수는 2^4-1개

5를 반드시 포함하는 집합 A의 진부분집합의 개수는 2^4-1개

6을 반드시 포함하는 집합 A의 진부분집합의 개수는 2^4-1개

m을 반드시 포함하는 집합 A의 진부분집합의 개수는

2^4-1개

$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n=390$이므로

$(3+4+5+6+m)\times(2^4-1)=390,\ (18+m)\times15=390$

$\therefore\ m=8$

따라서 $m+n=30+8=38$

05-1 93

조합의 수를 이용하여 부분집합의 개수 구하기

1을 반드시 포함 하는 원소의 개수가 4개 이하인 부분집합의 개수를 구하면

원소가 1개인 부분집합의 개수는 1(개)

원소가 2개인 부분집합의 개수는 8(개)

원소가 3개인 부분집합의 개수는 28(개)

원소가 4개인 부분집합의 개수는 56(개)

따라서 $1+8+28+56=93$(개)

05-2 496

A의 원소를 모두 구하면

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$이다.

4의 배수를 모두 포함하여야 하므로

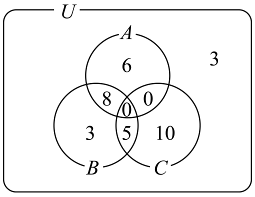
4, 8, 12, 16, 20은 포함되어야 하고

12이외의 3의 배수 3, 6, 9, 15, 18중 적어도 1개를 포함해야 하므로 2^5-1의 경우의 수가 있다.

나머지 원소 1, 2, 5, 10으로 만들 수 있는 집합의 경우의 수는 2^4이다.

$\therefore\ 2^4\times(2^5-1)=496$

06-1 13



A, B, C를 읽은 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(A)=14,\ n(B)=16,\ n(A\cup B)=22$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=14+16-22=8$

이때 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=14-8=6$이므로

$n(B\cup C)=35-(6+3)=26$

또, $n(C)=15$ 이므로

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=16+15-26=5$

$n(A\cap C)=0$이므로 $n(A\cap B\cap C)=0$

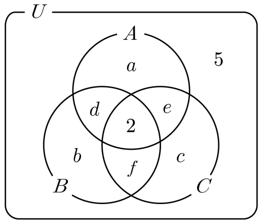
$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3n(A\cap B\cap C)$

$=8+5+0-0=13$

따라서 A, B, C 중 두 종류의 책만 읽은 학생은 13(명)이다.

06-2 9명

강아지를 키우는 집합을 A, 고양이를 키우는 집합을 B, 햄스터를 키우는 집합을 C라고 하고, 벤다이어그램으로 그리면 다음과 같다.



$n(A\cup B\cup C)=50=a+b+c+d+e+f+2,$

$n(A)=34=a+d+e+2,\ n(B)=21=b+d+f+2,$

$n(C)=8=c+e+f+2$

$n(A)+n(B)+n(C)=a+b+c+2(d+e+f)+6=63$

$a+b+c+2(d+e+f)=57=(50-2)+d+e+f,\ d+e+f=9$

따라서 구하는 값은 $d+e+f=9$

07-1 ④

X는 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, S의 일부를 원소로 하고 주어진 조건을 만족하는 집합이므로

$\{S,\varnothing\}$,

$\{\{a\},\ \{b,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{b\},\ \{a,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{c\},\ \{a,\ b\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$

그러므로 5개

07-2 15

$\varnothing$이 들어가면 S가 들어가야 한다.

$\{a\}$이 들어가면 $\{b,\ c,\ d\}$가 들어가야 한다.

$\{b\}$가 들어가면 $\{a,\ c,\ d\}$가 들어가야 한다.

$\{c\}$가 들어가면 $\{a,\ b,\ d\}$가 들어가야 한다.

$\{d\}$가 들어가면 $\{a,\ b,\ c\}$가 들어가야 한다.

$\{a,\ b\}$, $\{c,\ d\}$ / $\{a,\ c\}$, $\{b,\ d\}$ / $\{a,\ d\}$, $\{b,\ c\}$가 들어가는 경우 $\varnothing$과 S가 들어간다.

또한 $\{a\}$, $\{b\}$처럼 한 문자가 두 개 들어가는 경우, $\{a,\ b\}$, $\{c,\ d\}$, $\varnothing$, S가 모두 들어가게 되므로, 한 문자가 한 번 들어가거나, 들어가지 않는 경우로 집합을 나누어 세는 것이 좋다.

$\{\varnothing,\ S\}$, $\{\{a\},\ \{b,\ c,\ d\},\ \varnothing,\ S\}$등 한 문자가 한 번 들어가거나 들어가지 않는 경우가 5개

두 문자 짜리가 들어가는 경우 3가지 중 하나를 고르고, 각 경우마다 혼자 들어가거나, 다른 세트가 들어가는 경우가

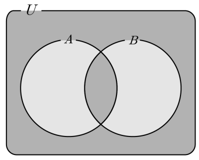
있으므로 3×3개
모두 다 들어가는 경우 1개
이상 총 15개다.
[다른풀이]
집합 $S=\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합은
$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\}\ ,\{a,\ d\},$
$\{b,\ c\},\ \{b,\ d\},\ \{c,\ d\}$, $\{a,\ b,\ c\},\ \{a,\ b,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\}$
$\{b,\ c,\ d\}$, S
조건과 $X\neq\varnothing$이므로 $\varnothing$, S는 항상 집합 X의 원소이다.
또한 $A\in X$이면 $A^c\in X$이다.
따라서 다음과 같이 구별하자.
(i) $n(X)=2$인 경우 : 1가지. $X=\{\varnothing,\ S\}$
(ii) $n(X)=4$인 경우 : $X=\{\varnothing,\ S,\ A,\ A^c\}$꼴에서 7가지.
(iii) $n(X)=8$인 경우 : 아래와 같은 경우로 6가지.
$X=\{\varnothing,\ S,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\},\ \{c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\}\}$
(iv) $n(X)=16$인 경우 : 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로
1가지.
따라서 구하는 집합 X의 개수는 $1+7+6+1=15$

08-1 ④

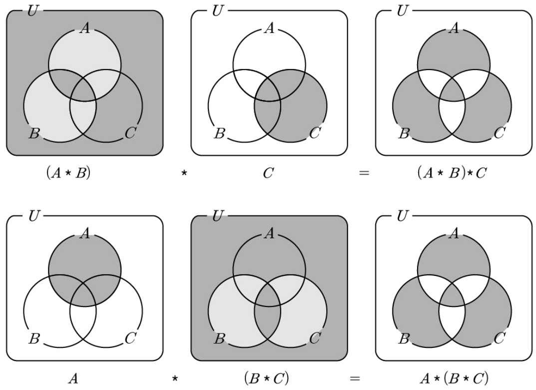
ㄱ. $A*B=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$
$=(B\cup A)^C\cup(B\cap A)$
$=B*A$ (참)
ㄴ. $A*A=A^C\cup A=U$ (거짓)
ㄷ. $A*A*A=U*A=U^C\cup A=A$
$A*A*A*A=A*A=U$
$A*A*A*A*A=A*A*A=A$
$\vdots$
위로부터
$\underbrace{A*A*A*\cdots*A}_{A\text{가 짝수개}}=U$
$\underbrace{A*A*A*\cdots*A}_{A\text{가 홀수개}}=A$
임을 알 수 있다. 2009 가 홀수이므로
$\underbrace{A*A*A*\cdots*A}_{A\text{가 }2009\text{개}}=A$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ과 ㄷ이다.
[참고]
연산 $*$에 대한 결합법칙 $A*(B*C)=(A*B)*C$이 성립하므로 $A*(B*C)$, $(A*B)*C$는 모두 $A*B*C$로 나타낼 수 있다.

08-2 ⑤

ㄱ. $A*B=(A\cap B)\cup(A\cup B)^c$
$=(B\cap A)\cup(B\cup A)^c$
$=B*A$ (참)
ㄴ. 집합 $A*B$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



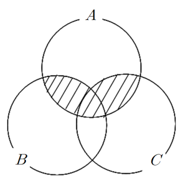
집합 $(A*B)*C$와 $A*(B*C)$를 벤다이어그램으로 나타내면



이므로 $(A*B)*C=A*(B*C)$ (참)
ㄷ. $A*A=(A\cap A)\cup(A\cup A)^c$
$=A\cup A^c=U$
$A*A*A=U*A=(U\cap A)\cup(U\cup A)^c$
$=A\cup U^c=A\cup\varnothing=A$
$A*A*A*A=A*A=U$
$\vdots$
이므로 자연수 n에 대하여
$\underbrace{A*A*\cdots*A}_{A\text{가 }(2n-1)\text{개}}=A$, $\underbrace{A*A*\cdots*A}_{A\text{가 }2n\text{개}}=U$이다.
그러므로 $\underbrace{A*A*\cdots*A}_{A\text{가 }2021\text{개}}=A$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

09-1 15

병원을 찾은 환자 전체의 집합을 U,
고열이 나는 환자들의 집합을 A,
기침을 하는 환자들의 집합을 B,
목통증이 있는 환자들의 집합을 C라 하면
구하는 집합은 다음 그림과 같다.



$n(U)=n(A\cup B\cup C)=90$, $n(A)=45$, $n(B)=37$,
$n(C)=29$, $n(B\cap C)=6$
$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)=60$
A에만 속하는 원소들의 개수는
$n(A\cup B\cup C)-n(B\cup C)=30$
$\therefore$ 구하는 부분의 원소의 개수는 $45-30=15$

09-2 12

목에 통증이 있는 환자의 집합을 A
허리에 통증이 있는 환자의 집합을 B
무릎에 통증이 있는 환자의 집합을 C라 하면
(가) $n(A\cap B)=25$
(나) $n(B)=54$
(다) $n(B^C\cap A)=13$
(라) $n(C\cap(A\cup B)^C)=33$
$n(A)=n((A\cup B\cup C)^C)$이다.
$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap B^C)=13+25$이므로
$n(A)=n((A\cup B\cup C)^C)=38$이다.
설문조사에 응한 환자의 수는
$n(A\cap B^C)+n(B)+n(C\cap(A\cup B)^C)+n((A\cup B\cup C)^C)$
$=13+54+33+38=138$이다.
따라서 설문조사에 응답하지 않은 환자들의 수는
$150-138=12$

10-1 ④

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 2^5개의 부분집합 중 최대의 원소인 5를 포함하는 것과 5를 포함하지 않는 것을 다음과 같이 일대일대응시킬 수 있다.

$\varnothing \leftrightarrow \{5\}$
$\{1\} \leftrightarrow \{1,\ 5\}$
$\{2\} \leftrightarrow \{2,\ 5\}$
$\{3\} \leftrightarrow \{3,\ 5\}$
$\vdots$
$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \leftrightarrow \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

두 집합 A, B가 위와 같이 대응될 때 $m(\varnothing)=0$으로 정하고 $m(A)+m(B)$의 값을 구하여 보자.

$\varnothing \leftrightarrow \{5\}$의 경우 : $0+5=5$
$\{1\}\leftrightarrow\{1,\ 5\}$의 경우 : $1+(5-1)=5$
$\{2\}\leftrightarrow\{2,\ 5\}$의 경우 : $2+(5-2)=5$
$\{3\}\leftrightarrow\{3,\ 5\}$의 경우 : $3+(5-3)=5$
$\vdots$
$\{1, 2, 3, 4\}\leftrightarrow\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 경우 :
$(4-3+2-1)+(5-4+3-2+1)=5$

이와 같은 경우가 부분집합의 개수의 절반인

$\frac{2^5}{2}=16$(가지)

만큼 존재하므로 구하는 값은

$m(X_1)+m(X_2)+\cdots+m(X_{31})=5\times16=80$

10-2 46

1을 원소로 가지는 부분집합을 A_k, 1을 원소로 가지지 않는 부분집합을 B_k라 하자. 집합 A_k 중에서 원소의 개수가 3개인 집합은 10개 (${}_5C_2$)
$m(A_1)+m(A_2)+\cdots+m(A_{10})=30$
집합 A_k중 원소의 개수가 4개 이상인 집합 16개는 집합 B_k와 1을 제외한 원소가 같은 집합으로 대응시킬 수 있다.

문제의 예시: $A_i=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$, $B_i=\{2,\ 4,\ 6\}$
$m(A_i)+m(B_i)=(1-2+4-6)+(2-4+6)=1$ 처럼 1을 제외한 모든 숫자의 부호가 반대가 되므로 $m(A_i)+m(B_i)=1$ (일정)
$\therefore\ 30+1\times16=46$

11-1 ③

ㄱ. $A_1(3)=\{x\mid N(3,\ x)=1\}$이고 3과 4는 서로소이므로 공약수의 개수가 1개이다. (참)
ㄴ. $A_3(4)=\{x\mid N(4,\ x)=3\}$이고 4의 약수의 개수가 3개이므로 $A_3(4)$는 4의 배수의 집합이다.
$\therefore\ n(A_3(4))=25$ (거짓)
ㄷ. $A_2(a)=\{x\mid N(a,\ x)=2\}$이므로 a가 소수이면 약수의 개수가 2개이므로 $A_2(a)$는 a의 배수의 집합이다.
$\therefore\ n(A_2(a))=\left[\frac{100}{a}\right]$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11-2 47

$A_2(3)=\{x\mid N(3,\ x)=2\}$이므로 3과 공약수가 2개인 수들의 집합이다.
즉, 3의 배수들의 집합이므로 $n(A_2(3))=33$이다.
$A_2(7)=\{x\mid N(7,\ x)=2\}$이므로 7의 배수들의 집합이다.
$\therefore\ n(A_2(7))=14$
따라서 구하는 답은 $33+14=47$이다.

12-1 ④

ㄱ. $A=\{1\}$일 때, $S(A)=1$
$A=U$일 때, $S(A)=15$이므로 $1\le S(A)\le 15$이다. (참)
ㄴ. $A\cup B=B$이면
$A\subset B$이므로 $S(A)\le S(B)$이다. (거짓)
ㄷ. $S(A\cap B)=\frac{S(U)}{5}=3$, $S(A\cup B)=15$ 이므로
$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=18$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12-2 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{6\}$이면 $S(A)<S(B)$이지만 $A\subset B$가 성립하지 않는다. (거짓)
ㄴ. $A^c=B$이면 $A\cap B=\varnothing$이고 $A\cup B=U$이므로
$S(A)+S(B)=S(U)=21$이다. (참)
ㄷ. $A=\{1,\ 2,\ 4\}$일 때, $S(A)=7$이므로
$S(A)\le S(B)$에서 $7\le S(B)$를 만족시켜야 한다.
이 때, ㄴ에 의하여 $0\le S(B)\le 21$이므로 구하는 집합 B의 개수는 전체집합 U의 모든 부분집합의 개수 $2^6=64$에서 $0\le S(B)<7$인 집합 B의 개수를 빼면 되므로 집합 B의 원소의 개수를 기준으로 생각해 보면

다음과 같다.

(ⅰ) $n(B)=0$인 경우
가능한 집합 B는 $\varnothing$으로 1개

(ⅱ) $n(B)=1$인 경우
가능한 집합 B는 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$으로 6개

(ⅲ) $n(B)=2$인 경우
가능한 집합 B는 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$로 6개

(ⅳ) $n(B)=3$인 경우
가능한 집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로 1개

(ⅴ) $n(B)\geq 4$인 경우
$S(B)$의 최솟값은 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$일 때, 10이므로 가능한 집합 B가 존재하지 않는다.

그러므로 구하는 집합 B의 개수는
$64-(1+6+6+1)=50$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

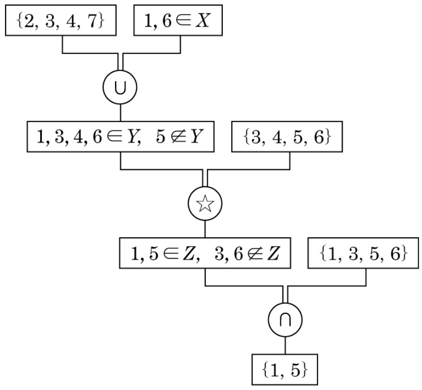
13-1 128

조건 (가)에서 $A\cup X=X$이므로 집합 A는 집합 X의 부분집합이다. 즉, $A\subset X$이다.
그러므로 집합 A의 두 원소 1과 2는 집합 X의 원소이다.
또, 두 집합 A와 B에서
$A=\{1,2\}$이고 $B=\{2,3,5,7\}$이므로 $B-A=\{3,5,7\}$
조건 (나)에서 $(B-A)\cap X=\{5,7\}$이므로
$\{3,5,7\}\cap X=\{5,7\}$ 따라서 $5,7\in X,\ 3\notin X$
그러므로 1, 2, 5, 7은 반드시 집합 X에 속해야 하고 3은 속하지 않아야 한다.
그런데 전체집합 $U=\{x|1\leq x\leq 12,\ x\text{는 자연수}\}$의 원소의 개수는 12이다.
따라서 주어진 조건을 만족하는 집합 X의 개수는
$2^{12-4-1}=2^7=128$이다.

13-2 16

$A=\{3,\ 6,\ 9\}$
$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
(가) $A\subset X$
(나) $\{1,\ 5,\ 7\}$중 1만 원소로 포함한다.
$2^{10-3-3}=2^4=16$

14-1 7



그림의 연산 $\cap$에서 교집합이 $\{1,5\}$이기 위해서는 집합 Z가 원소 1과 5는 반드시 포함하고 원소 3과 6은 포함하지 않아야 한다.

$$\therefore\ 1,5\in Z,\ 3,6\notin Z$$

그림의 연산 ☆에서
$Y☆\{3,4,5,6\}=(Y-\{3,4,5,6\})\cup(\{3,4,5,6\}-Y)=Z$
그런데 집합 $(Y-\{3,4,5,6\})\cup(\{3,4,5,6\}-Y)$은 $Y\cup\{3,4,5,6\}$에서 $Y\cap\{3,4,5,6\}$을 제외한 집합이다.
그러므로 $3,6\notin Z$에서 $3,6\in(Y\cap\{3,4,5,6\})$이다.
$\therefore\ 3,\ 6\in Y$
$1\in Z$이므로 $1\in(Y\cup\{3,4,5,6\})$에서 $1\in Y$이다.
또, $5\in Z$이고 $5\in\{3,4,5,6\}$이므로 $5\notin Y$이다.
따라서 $1,\ 3,\ 6\in Y$이고 $5\notin Y$이다.
그림의 연산 $\cup$에서 $\{2,3,4,7\}\cup X=Y$이므로
$Y\supset\{1,2,3,4,6,7\}$이다.
집합 Y가 이와 같이 될 수 있는 집합 X 중에서 원소의 합이 가장 작은 것은 $X=\{1,6\}$일 때이다.
따라서 X의 모든 원소의 합을 s라 하면 s의 최솟값은 $1+6=7$이다.

[다른 풀이]
모든 단계에서 사용된 원소가 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7뿐이므로 원소 1, 5, 6이 집합 X의 원소가 되는지 확인해 보는 것만으로 충분하다.

(ⅰ) $1\in X$인 경우 : $1\in Y$이므로 $1\in Z$가 되어 연산이 성립한다.

(ⅱ) $5\in X$인 경우 : $5\in Y$이고 $5\notin Z$가 되어 $5\notin Z\cap\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$이므로 연산이 성립하지 않는다.

(ⅲ) $6\in X$인 경우 : $6\in Y$이므로 $6\notin Z$가 되어 연산이 성립한다.

14-2 11

그림의 연산 $\cap$에서 교집합이 $\{2,8\}$이기 위해서는 집합 Z가 원소 2과 8는 반드시 포함하고 원소 3과 9은 포함하지 않아야 한다.

$$\therefore\ 2,8\in Z,\ 3,9\notin Z$$

그림의 연산 ☆에서
$Y☆\{3,\ 5,\ 8,\ 9\}$
$=(Y-\{3,\ 5,\ 8,\ 9\})\cup(\{3,\ 5,\ 8,\ 9\}-Y)=Z$
그런데 집합 $(Y-\{3,\ 5,\ 8,\ 9\})\cup(\{3,\ 5,\ 8,\ 9\}-Y)$은 $Y\cup\{3,\ 5,\ 8,\ 9\}$에서 $Y\cap\{3,\ 5,\ 8,\ 9\}$을 제외한 집합이다.
그러므로 $3,\ 9\notin Z$에서 $3,\ 9\in(Y\cap\{3,\ 5,\ 8,\ 9\})$이다.

$\therefore$ $3,\ 9\in Y$
$2\in Z$이므로 $2\in(Y\cup\{3,\ 5,\ 8,\ 9\})$에서 $2\in Y$이다.
또, $8\in Z$이고 $8\in\{3,\ 5,\ 8,\ 9\}$이므로 $8\not\in Y$이다.
따라서 $2,\ 3,\ 9\in Y$이고 $8\not\in Y$이다.
그림의 연산 $\cup$에서 $\{1, 3, 5, 7\}\cup X=Y$이므로
$Y\supset\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$이다.
집합 Y가 이와 같이 될 수 있는 집합 X 중에서 원소의 합이 가장 작은 것은 $X=\{2, 9\}$일 때이다.
따라서 X의 모든 원소의 합을 s라 하면 s의 최솟값은 $2+9=11$이다.

15-1 28

$M(X)\geq 3$을 만족하기 위하여 A의 부분집합 X는 3이상의 원소를 적어도 하나 가져야 한다.
즉, 조건을 만족하는 집합 X는 A의 부분집합 전체에서 3이상의 원소를 갖지 않는 부분집합을 제외한 것이다.
$\therefore$ 집합 X의 개수는 $2^5-2^2=32-4=28$

15-2 64

(ⅰ) 집합 A의 원소가 2일 때
반드시 7 또는 8을 원소로 가져야 하므로
$2^{7-2}+2^{7-2}-2^{7-3}=48$
(ⅱ) 집합 A의 원소가 2는 가지지 않고 3을 가질 때 반드시
8의 원소를 가져야 하므로 $2^{7-1-2}=16$
따라서 집합 A의 개수는 $48+16=64$이다.

16-1 ②

ㄱ. 3이하의 소수는 2, 3이므로 $A_3=\{2,\ 3\}$
4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 $B_4=\{1,\ 2,\ 4\}$
그러므로 $A_3\cap B_4=\{2\}$ (참)
ㄴ. $a\in A_n$이면 $a\leq n$이고 a는 소수이다.
$a\leq n<n+1$이고 a는 소수이므로 $a\in A_{n+1}$
그러므로 $A_n\subset A_{n+1}$ (참)
ㄷ. (반례) $m=4,\ n=8$이면
$B_4=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B_8=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로 $B_4\subset B_8$
그런데 4는 8의 배수가 아니다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16-2 ①

ㄱ. A_3은 3의 배수의 집합, A_4는 4의 배수의 집합이므로
$A_3\cap A_4=A_{12}$이다. (참)
ㄴ. $n=2,\ m=4$이면 $A_2=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$,
$A_8=\{8,\ 16,\ 24,\ \cdots\}$이므로 $A_2\not\subset A_8$이다. (거짓)
ㄷ. $m=4,\ n=6$이면
$B_4=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B_6=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이다.
$B_4\cup B_6=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, 4와 6의 최대공약수는
2이므로 $B_2=\{1,\ 2\}$이다. 따라서 $B_4\cup B_6\neq B_2$이다.
(거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

17-1 39

집합 $A_n\cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이다.
$A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 n과 2의 최소공배수는 $2n$이므로 n과 2는 서로소이다.
따라서 n은 홀수인 자연수이다.
90이 집합 A_2-A_n의 원소이면 $90\in A_2$, $90\not\in A_n$이므로 90은 n의 배수가 아니다.
즉, n은 90의 약수가 아니다.
한편, 90의 홀수인 약수는 1, 3, 5, 9, 15, 45이다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n은 90 이하의 홀수 중 90의 홀수인 약수를 제외한 나머지 수이므로 그 개수는
$45-6=39$

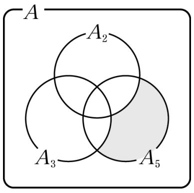
17-2 26

$A_n\cap A_2=A_{2n}$을 만족하려면 n이 2의 배수이면 안되므로 n은 홀수이어야 한다.
또한 60이 집합 A_2-A_n의 원소가 되려면 n의 60의 약수이면 안된다. 따라서 60이하의 홀수 중 60의 약수인 1, 3, 5, 15를 제외하면 조건을 만족하는 n의 개수는 $30-4=26$

18-1 127

$50=2\times5^2$이므로 집합 B의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.
(나)에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다.
(다)에서 $12=2^2\times3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.
따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.
따라서 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는
5, 25, 35, 55, 65, 85, 95
이다. (가)에서 집합 X는 집합
$\{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95\}$
의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로
집합 X의 개수는
$2^7-1=128-1=127$
[다른 풀이]
집합 A를 전체집합으로 생각하자.
(가)에서 $X\subset A$이므로 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 자연수이다.
집합 A의 부분집합 중에서 2의 배수의 집합을 A_2, 3의 배수의 집합을 A_3, 5의 배수의 집합을 A_5라 하자.
(나)에서 $X\cap B=\varnothing$이고, $50=2\times5^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수이거나 5의 배수이다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 $A_2 \cup A_5$에 속한다.
(다)에서 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.
따라서 집합 X의 모든 원소는 $A_2^C \cap A_3^C = (A_2 \cup A_3)^C$에 속한다.
(가), (나), (다)에서 집합 X의 모든 원소는
$(A_2 \cup A_5) \cap (A_2 \cup A_3)^C = A_5 - (A_2 \cup A_3)$에 속한다.
따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.



그러므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는
5, 25, 35, 55, 65, 85, 95이다.
(가)에서 집합 X는 집합
$\{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95\}$
의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 집합 X의 개수는
$2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

18-2 255

(나) 조건에서 X는 63과 서로소인 집합과 교집합이 없어야 하므로 63과 서로소가 아닌 수들로 이루어져 있다. 즉 X의 모든 원소는 3 또는 7을 소인수로 가지고 있어야 한다.
(다) 조건에서 X의 모든 원소는 75와 서로소 이어야 하므로 3 또는 5를 소인수로 가지고 있으면 안된다.
즉, X의 모든 원소는 7을 소인수로 가지며 3과 5는 소인수로 갖지 않는다.
X가 될 수 있는 수는 7, 14, 28, 49, 56, 77, 91, 98의 8개이고, X는 이 8개의 숫자를 원소로 갖는 집합의 부분집합이다.
$\therefore\ 2^8 - 1 = 255$

19-1 12

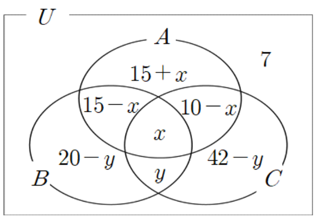
집합 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$라 하면
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 28$이다.
집합 $B = \left\{\frac{x_1+a}{2}, \frac{x_2+a}{2}, \frac{x_3+a}{2}, \frac{x_4+a}{2}, \frac{x_5+a}{2}\right\}$
이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) + \frac{5}{2}a = \frac{1}{2} \times 28 + \frac{5}{2}a = 14 + \frac{5}{2}a$
이다. 집합 $A \cup B$의 모든 원소의 합은 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합에서 집합 $A \cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같다.
따라서 $49 = 28 + \left(14 + \frac{5}{2}a\right) - (10+13)$
$\frac{5}{2}a = 30$이다. $\therefore a = 12$

19-2 12

집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$라 표현하면
(가)에 따라 $S(A) = 30$
(나)에 따라 $S(A \cup B) = 55$
(다)에 따라 $S(A \cap B) = 25$
$B = \left\{\frac{x+2a}{3} \mid x \in A\right\}$이고 $n(A) = 5$이므로
$S(B) = \frac{30+10a}{3}$
$\therefore\ S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$
$55 = 30 + \frac{30+10a}{3} - 25$
$\therefore\ a = 12$

20-1 ④

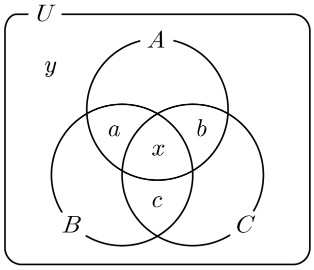
전체집합을 U, $n(A \cap B \cap C) = x$,
$n((B \cap C) - A) = y$라 하고 벤다이어그램에 각각의 영역에 해당하는 원소의 개수를 표시하면



$n(A \cup B \cup C) = 102 - y = 93$이므로 $y = 9$
x의 범위는 $0 \le x \le 10$
두 문제 이상 맞힌 학생 수는 $34 - x$이므로
최솟값은 $x = 10$일 때 24명

20-2 25

A, B, C동아리에 가입한 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하자.



모두 가입한 학생 수를 x, 어느 동아리에도 가입하지 않은 학생 수를 y라고 하자.
$$150 - y = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$
$b = 52 - x$, $a = 65 - x$, $c = 47 - x$이고
C를 가입한 학생의 수는 $74 = 47 + 52 - x$이므로 $x = 25$이다.

21-1 8

$X = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ a+1,\ a+3,\ a+5\}$이므로

$n(X)=10$이 되기 위해서는
$(a+3<2,\ a+5\geq 2)$
또는 $(a+1\leq 9,\ a+3>9)$
$\therefore\ -3\leq a<-1$ 또는 $6<a\leq 8$
그러므로 자연수 a는 7, 8
따라서 자연수 a의 최댓값은 8

21-2 15
$X=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ a+1,\ a+3,\ a+5\}$이다.
$2\leq a+1$이므로 $n(X)=10$이 되기 위해서는
$a+1\leq 9,\ a+3>9$이다.
따라서 $6<a\leq 8$이다.
자연수 a는 7, 8이므로 $M+m=15$

22-1 16
$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로
$P=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$\quad=(A\cup B)-(A\cap B)=\{1,\ 4,\ 5\}$
$P\subset X\subset U$이므로
$\{1,\ 4,\ 5\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
집합 X는 1, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 전체집합 U의 부분집합이다.
이를 만족시키는 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

22-2 16
$P=(A\cap B)^c\cap(A\cup B)^c=(A\cup B)^c=\{2,\ 5,\ 6,\ 8\}$
$\{2,\ 5,\ 6,\ 8\}\subset X\subset U$이므로
집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 P의 원소 2, 5, 6, 8을 반드시 가지는 집합이다.
따라서 $2^{8-4}=16$

23-1 33
수학 문제집 A, B, C를 선택한 집합을 각각 A, B, C라고 하면
$n(A\cap B)=15$, $n(B\cap C)=12$, $n(C\cap A)=11$
$n(A\cup B)=55$, $n(B\cup C)=54$, $n(C\cup A)=51$이다.
$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=55+15=70$
$n(B)+n(C)=n(B\cup C)+n(B\cap C)=54+12=66$
$n(C)+n(A)=n(C\cup A)+n(C\cap A)=51+11=62$
$n(A)+n(B)+n(C)=99$
$\quad\therefore\ n(A)=99-66=33$

23-2 12명
목에 통증이 있는 환자의 집합을 A
허리에 통증이 있는 환자의 집합을 B
무릎에 통증이 있는 환자의 집합을 C라 하면
(가) $n(A\cap B)=25$
(나) $n(B)=54$
(다) $n(B^C\cap A)=13$
(라) $n(C\cap(A\cup B)^C)=33$
$n(A)=n((A\cup B\cup C)^C)$이다.
$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap B^C)=13+25$이므로
$n(A)=n((A\cup B\cup C)^C)=28$이다.
설문조사에 응한 환자의 수는
$n(A\cap B^C)+n(B)+n(C\cap(A\cup B)^C)+n((A\cup B\cup C)^C)$
$=13+54+33+38=138$이다.
따라서 설문조사에 응답하지 않은 환자들의 수는
$150-138=12$

24-1 ⑤
조건 (가)에서
$X\cap\{1,2,3\}=\{2\}$이므로 $1\not\in X$, $2\in X$, $3\not\in X$
조건 (나)에서
집합 X의 모든 원소의 합 $S(X)$가 홀수이므로
집합 X는 집합 A의 원소 중 홀수인 1, 3, 5, 7 중에서 1개 또는 3개를 원소로 가져야 한다.
$1\not\in X$, $3\not\in X$이므로 집합 X는 5, 7 중 1개만을 원소로 가져야 한다.
두 조건 (가), (나)를 만족시키면서
$S(X)$가 최대가 될 때는 집합 A의 원소 중 짝수인 4, 6을 원소로 갖고, 홀수인 7을 원소로 가질 때이다.
즉, $X=\{2,4,6,7\}$일 때 $S(X)$가 최대가 된다.
따라서 $S(X)$의 최댓값은
$2+4+6+7=19$

24-2 6, 12
(ⅰ) $A\cap B=\{2,\ 5\}$일 때, $k=10$이고 $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이므로 집합 $A-B=\{1,\ 10\}$의 모든 원소의 합은 11(홀수)
$k=10$은 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $A\cap B=\{2,\ 6\}$일 때, $2\in A$, $6\in A$
2와 6이 k의 약수이므로 k는 6의 배수이다.
k는 18 이하의 자연수이므로 가능한 $k=6,\ 12,\ 18$이다.
(a) $k=6$인 경우
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로 집합 $A-B=\{1,\ 3\}$의 모든 원소의 합은 4(짝수)
$k=6$은 조건을 만족시킨다.
(b) $k=12$인 경우
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로 집합
$A-B=\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$의 모든 원소의 합은 20(짝수)
$k=12$는 조건을 만족시킨다.
(c) $k=18$인 경우
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로 집합
$A-B=\{1,\ 3,\ 9,\ 18\}$의 모든 원소의 합은 31(홀수)
$k=18$은 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 짝수가 되는 모든 k의 값은 6, 12이다.

25-1 ③

(가)에서 집합 A의 원소 1, 2, 3은 모두 집합 X의 원소이므로 $A \subset X$

(나)에서 집합 X는 집합 B의 원소 4, 5, 6을 원소로 갖지 않으므로 $X \subset B^C$

그러므로 전체집합 U의 부분집합 X는

$\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$

$\therefore$ X의 개수는 $2^{7-3}=2^4=16$

25-2 32개

$U=\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

조건 (가) $A-X=\varnothing \Leftrightarrow A \subset X$

따라서 $A \subset X$이므로

X는 5, 6을 반드시 포함한다. …… ㉠

조건 (나) $B \cap X=\varnothing \Leftrightarrow B$와 X는 서로소이다.

따라서 집합 X는 7, 8은 포함하지 않는 U의 부분집합이어야 한다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 U의 부분집합 X의 개수는 $2^{9-2-2}=32$

26-1 62

자연수 전체의 집합의 부분집합 X가

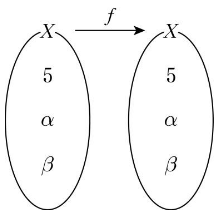
$n(X)=3$이고 $5 \in X$이므로 $X=\{5, \alpha, \beta\}$

대응 $f: X \rightarrow X$를

$x \in X$가 홀수이면 $f(x)=\dfrac{x+p}{2}$

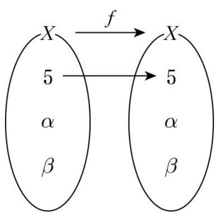
$x \in X$가 짝수이면 $f(x)=\dfrac{x}{2}$

로 정의하면 f는 함수이다.



$\dfrac{5+p}{2}$가 자연수가 되어야 하므로 p는 홀수이다.

(i) $f(5)=5$, 즉 $p=5$일 때



$f(\alpha)=5$, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$인 경우를 각각 생각할 수 있다.

$f(\alpha)=5$일 때, α가 짝수이면 $\dfrac{\alpha}{2}=5$, $\alpha=10$

이때 β가 홀수이면 $\beta=15$이고,

β가 짝수이면 $\beta=20$

따라서 가능한 경우는

$X=\{5, 10, 15\}$, $X=\{5, 10, 20\}$

따라서 $p=5$이고 α가 짝수인 경우

가능한 집합 X가 존재하므로 $p=5$일 때, α가 홀수인 경우와 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$인 경우는 다루지 않는다.

(ii) $f(5)=\alpha$일 때

$\alpha \neq 5$이므로 $p \neq 5$

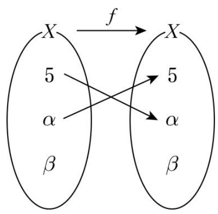
그런데 $p<5$인 홀수인 경우에는 $n(X)=3$인 경우가 존재하지 않음을 쉽게 확인할 수 있다.

따라서 $p>5$인 경우만 생각하면 된다.

$5<p$이면 $5<\alpha<p$이다.

이때 가능한 경우로 $f(\alpha)=5$ 또는 $f(\alpha)=\alpha$ 또는 $f(\alpha)=\beta$를 생각해 볼 수 있다.

(ii -1) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=5$일 때



α가 짝수이면 $\dfrac{\alpha}{2}=5$, $\alpha=10$이고,

$\dfrac{5+p}{2}=10$이므로 $p=15$

가능한 β의 값은 $\beta=15$와 $\beta=20$이 있다.

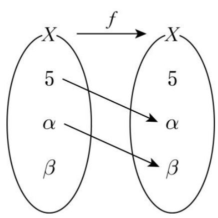
(ii -2) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=\alpha$일 때

$\alpha \neq 5$이면 $p \neq 5$이므로

$\dfrac{\alpha}{2} \neq \alpha$, $\dfrac{\alpha+p}{2} \neq \alpha$

따라서 이 경우는 존재하지 않는다.

(ii -3) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$일 때



$f(\beta)=5$ 또는 $f(\beta)=\alpha$ 또는 $f(\beta)=\beta$의 경우를 생각해 볼 수 있다.

(ii -3-a) $f(\beta)=5$일 때,

(ii -3-a-ㄱ) α가 짝수이면 $\dfrac{\alpha}{2}=\beta$

이때 β가 짝수이면 $\dfrac{\beta}{2}=5$, $\beta=10$이고, $\alpha=20$

$\dfrac{5+p}{2}=20$이므로 $p=35$

이때 $X=\{5, 10, 20\}$

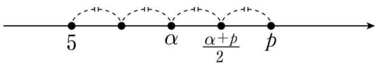
β가 홀수이면

$f(\beta)=f(f(\alpha))=f(f(f(5)))$ 에서

$\dfrac{\beta+p}{2}=\dfrac{\alpha+2p}{4}=\dfrac{5+5p}{8}=5$ 이고, $p=7$

이때 $X=\{3,\ 5,\ 6\}$

(ⅱ-3-a-ㄴ) $p>5$ 이면 $5,\ \alpha,\ p,\ \dfrac{\alpha+p}{2}$ 의 대소 관계는 다음 그림과 같다.



α가 홀수이면 $\dfrac{\alpha+p}{2}=\beta$

β가 홀수이면 $\alpha<\beta<\dfrac{\beta+p}{2}<p$ 이므로

$n(X)\geq 4$가 되어 모순이 생긴다.

β가 짝수이면 $\dfrac{\beta}{2}=5$

$f(\beta)=\dfrac{\beta}{2}=5$, 즉 $\beta=10$ 일 때,

$\dfrac{\alpha+p}{2}=\dfrac{\dfrac{5+p}{2}+p}{2}=10,\ p=\dfrac{35}{3}$ 이므로 모순이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

(ⅱ-3-b) $f(\beta)=\alpha$일 때,

(ⅱ-3-b-ㄱ) α가 짝수이고 β가 짝수이면

$f(\beta)=\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\alpha}{4}=\alpha$ 이므로

$\alpha=0$ 이 되어 모순이다.

(ⅱ-3-b-ㄴ) α가 짝수이고 β가 홀수이면

$\alpha=f(\beta)=f(f(f(5)))$ 이므로

$\dfrac{5+p}{2}=\dfrac{5+5p}{8},\ p=15$ 이고

$\beta=5$가 되어 모순이다.

(ⅱ-3-b-ㄷ) α가 홀수이면 β는 짝수이고 이 경우 $\dfrac{\beta}{2}=\alpha$가 된다.

$\dfrac{5+3p}{8}=\dfrac{5+p}{2},\ p<0$ 이 되어 모순이다.

(ⅱ-3-c) $f(\beta)=\beta$일 때,

$\beta<p$ 이므로 $\dfrac{\beta}{2}\neq\beta$ 이고,

$\dfrac{\beta+p}{2}\neq\beta$ 이므로 $f(\beta)\neq\beta$ 이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 p의 값의 합은

$5+7+15+35=62$

26-2 33

$4\in X$이고 $4\in A_1$이므로, $\dfrac{4+p}{3}\in X$이다.

(ⅰ) $\dfrac{4+p}{3}=4$인 경우 $p=8$

(ⅱ) $\dfrac{4+p}{3}\in A_1$인 경우 $\dfrac{\dfrac{4+p}{3}+p}{3}=\dfrac{4+p}{3}$

$p=8$

(ⅲ) $\dfrac{4+p}{3}\in A_2$인 경우

$\dfrac{\dfrac{4+p}{3}+p-1}{3}=4,\quad p=\dfrac{35}{4}$ 는 자연수가 아니다.

$\dfrac{\dfrac{4+p}{3}+p-1}{3}=\dfrac{4+p}{3},\qquad p=11$

(ⅳ) $\dfrac{4+p}{3}\in A_3$인 경우

$\dfrac{\dfrac{4+p}{3}+p-2}{3}=4,\quad p=\dfrac{38}{4}$ 은 자연수가 아니다.

$\dfrac{\dfrac{4+p}{3}+p-2}{3}=\dfrac{4+p}{3},\qquad p=14$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의해 만족하는 자연수 p는

$8,\ 11,\ 14$이므로

모든 자연수 p의 값의 합은 33이다.

27-1 ④

봉사 활동 A, B를 신청한 학생을 원소로 하는 집합을 각각 A, B라 하자.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이고

$n(A)+n(B)=36$ 이므로

$n(A\cup B)=36-n(A\cap B)$ …… ㉠

학급의 학생 수가 30 이므로

$n(A\cup B)\leq 30$

㉠에 의하여

$36-n(A\cap B)\leq 30$

$n(A\cap B)\geq 6$ …… ㉡

$n(A\cap B)\leq n(A\cup B)$

이고 ㉠에 의하여

$n(A\cap B)\leq 36-n(A\cap B)$

$n(A\cap B)\leq 18$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여

$6\leq n(A\cap B)\leq 18$

$M=18,\ m=6$ 이므로

$M+m=24$

27-2 16

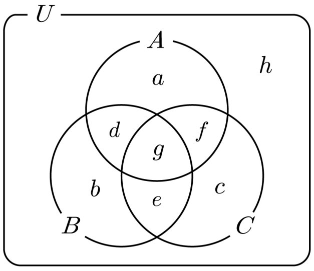
학생 전체의 집합을 U,

학습 도우미를 희망하는 학생의 집합을 A,

캠페인 봉사활동을 희망하는 학생의 집합을 B

분리수거를 희망하는 학생의 집합을 C라 하자.

다음과 같은 벤다이어그램에서 각 영역에 포함되는 원소의 개수를 a~h라 하자.



조건 (다)에서 $e=c=0$이므로, 조건 (나)를 a~h로 나타내면 $a+f+h=8$이다.

$\therefore\ a+f \le 8$ …… ㉠

또한 조건 (가)에서 $a+d+f+g=14$이므로 ㉠와 연립하면 $d+g$의 범위를 다음과 같이 구할 수 있다. $14-8 \le d+g \le 14$

$\therefore\ 6 \le d+g \le 14$ …… ㉡

조건 (다)에서 $f+g=4$이므로 $0 \le g \le 4$이다.

㉡와 연립하면 d의 범위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$6-4 \le d \le 14-0$

$\therefore\ 2 \le d \le 14$

$M=14,\ m=2$

$\therefore\ M+n=16$

28-1 ②

$S(X)$의 값이 최대, $S(Y)$의 값이 최소일 때, $S(X)-S(Y)$는 최댓값을 갖는다.

집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소가 서로 나누어 떨어지지 않으려면 $k \in X$일 때, k를 제외한 k의 약수와 배수가 집합 X의 원소가 아니어야 한다.

11, 12, 13, …, 21은 서로 나누어떨어지지 않으므로 $S(X)$가 최댓값을 가지려면 집합 X는 11, 12, 13, …, 21을 원소로 가져야 한다.

이때 1, 3, 7은 21의 약수이고, 2, 4, 5, 10은 20의 약수, 6, 9는 18의 약수, 8은 16의 약수이므로

1, 2, …, 10은 집합 X의 원소가 될 수 없다.

또한 $n(X \cup Y)=17$, $n(X \cap Y)=1$이므로 $S(Y)$가 최솟값을 가지려면 집합 Y는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11을 원소로 가져야 한다. 따라서 $X=\{11, 12, 13, \cdots, 20, 21\}$,

$Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\}$일 때

$S(X)-S(Y)$는 최댓값 144를 갖는다.

28-2 85

$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$이므로

$n(A)+n(B)=15$

$n(A) \ge 2$, $n(A) \le n(B)$이므로

$n(A)$	2	3	4	5	…	6	7
$n(B)$	13	12	11	10	…	9	8

$S(A)-S(B)$가 최대가 되기 위해서는 $n(A)=7$, $n(B)=8$, 집합 $(A-B)$의 원소들이 크고 집합 $B-A$의 원소들이 작아야 한다.

$A=\{23, 21, 20, 19, 17, 13, 11\}$,

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$일 때,

$S(A)-S(B)=85$

29-1 ②

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 원소 중에서 조건 (다)를 만족시키는 $a \in A$, $b \in B$를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

$(1, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 2)$, $(4, 6)$,

$(5, 3)$, $(6, 7)$, $(7, 4)$, $(8, 8)$

따라서 1과 8은 집합 $A-B$의 원소가 아니다.

$p \in A-B(p \ne 1,\ p \ne 8)$이면

$(p, q) \in \{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$인

q가 집합 B에 존재한다.

$q \in B-A$ 또는 $q \in A \cap B$

그런데 $q \in A \cap B$인 경우에는

$(q, r) \in \{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$인

r가 집합 $B-A$에 존재하게 된다.

그러므로 $r \ne 1$, $r \ne 8$

한편 $p \ne 1$, $p \ne 8$이므로

1과 8은 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있다.

따라서 $n(A-B) \le n(B-A)$

$n(A-B)=2$, $n(A \cup B)=5$이므로

$n(B-A)=2$ 또는 $n(B-A)=3$

(ⅰ) 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 구하기 위해 $n(B-A)=3$인 경우를 생각하자.

8은 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있으므로

$8 \in B-A$

$n(A-B)=2$, $n(B-A)=3$이고 $8 \in B-A$이므로

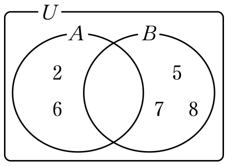
7이 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $6 \in A-B$이다.

그러므로 $7 \in B-A$이면 $6 \notin B-A$

5가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $2 \in A-B$이다.

$A-B=\{2, 6\}$, $B-A=\{5, 7, 8\}$일 때, 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합이 최대가 된다.

그러므로 최댓값은 $5+7+8=20$



(ⅱ) 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값을 구하기 위해 $n(B-A)=2$인 경우를 생각하자.

$n(A-B)=2$, $n(B-A)=2$이므로

$1 \notin B-A$

2가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $3 \in A$

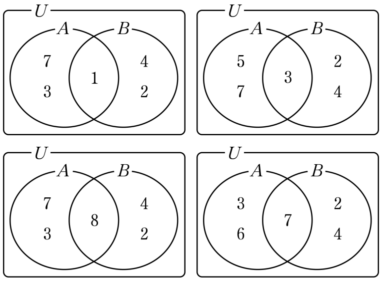
그러므로 $2 \in B-A$이면 $3 \notin B-A$

4가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $7 \in A$이다.

$B-A=\{2, 4\}$일 때, 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합이 최소이다.

그러므로 최솟값은 $2+4=6$

실제로 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값이 6인 경우는 다음 그림의 4가지이다.



따라서 $M=20$, $m=6$이므로 $M+m=26$

29-2 27

조건 (다)를 만족하는 $b\in B$라고 하면
$(a,\ b)$를 만족하는 순서쌍은
$\{(1,\ 1),\ (2,\ 5),\ (3,\ 2),\ (4,\ 6),\ (5,\ 3),\ (6,\ 7),\ (7,\ 4),\ (8,\ 8)\}$
이다. 이 중
$\{(1,\ 1),\ (8,\ 8)\}\in B-A$, $\{(1,\ 1),\ (8,\ 8)\}\in A\cap B$을
만족해야하며 조건 (나)에 의해
$\{(8,\ 8)\}\not\in B-A$, $\{(8,\ 8)\}\not\in A\cap B$ 이다.
조건 (가), (나)를 만족하는 집합은 다음과 같다.

(ⅰ) $\{1\}\in A\cap B$를 만족하며 집합 A, B의 원소들이 서로소인 경우
$A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{1,\ 5,\ 6\}$
$A=\{1,\ 2,\ 6\}$, $B=\{1,\ 5,\ 7\}$
$A=\{1,\ 2,\ 7\}$, $B=\{1,\ 5,\ 4\}$
$A=\{1,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 4,\ 6\}$
$A=\{1,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 7\}$
$A=\{1,\ 3,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$
$A=\{1,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 6\}$
$A=\{1,\ 5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 7\}$
$A=\{1,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 4\}$

(ⅱ) $\{1\}\in B-A$를 만족하며 집합 A, B의 원소들이 서로소인 경우
$A=\{2,\ 4\}$, $B=\{1,\ 5,\ 6\}$
$A=\{2,\ 6\}$, $B=\{1,\ 5,\ 7\}$
$A=\{2,\ 7\}$, $B=\{1,\ 5,\ 4\}$
$A=\{3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 4,\ 6\}$
$A=\{3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 7\}$
$A=\{3,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$
$A=\{4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 6\}$
$A=\{5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 7\}$
$A=\{5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 4\}$

(ⅲ) $\{1\}\not\in B-A, \{1\}\not\in A\cap B$이며 교집합의 원소가 하나인 경우
$A=\{4,\ 2,\ 5\}$, $B=\{6,\ 5,\ 3\}$
$A=\{6,\ 2,\ 5\}$, $B=\{7,\ 5,\ 3\}$
$A=\{7,\ 2,\ 5\}$, $B=\{4,\ 5,\ 3\}$
$A=\{7,\ 3,\ 2\}$, $B=\{4,\ 2,\ 5\}$
$A=\{4,\ 3,\ 2\}$, $B=\{6,\ 2,\ 5\}$
$A=\{6,\ 3,\ 2\}$, $B=\{7,\ 2,\ 5\}$
$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{5,\ 6,\ 7\}$
$A=\{3,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 6,\ 7\}$
$A=\{5,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 6,\ 7\}$
$A=\{4,\ 5,\ 3\}$, $B=\{6,\ 3,\ 2\}$
$A=\{7,\ 5,\ 3\}$, $B=\{4,\ 3,\ 2\}$
$A=\{6,\ 5,\ 3\}$, $B=\{7,\ 3,\ 2\}$
$A=\{2,\ 6,\ 7\}$, $B=\{5,\ 7,\ 4\}$
$A=\{3,\ 6,\ 7\}$, $B=\{2,\ 7,\ 4\}$
$A=\{5,\ 6,\ 7\}$, $B=\{3,\ 7,\ 4\}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 만족하는 집합 B의 개수는 27개다.

30-1 144

(ⅰ) 가장 작은 원소가 2인 경우
52

(ⅱ) 가장 작은 원소가 2^2인 경우
44

(ⅲ) 가장 작은 원소가 2^3인 경우
32

(ⅳ) 가장 작은 원소가 2^4인 경우
16

따라서 $52+44+32+16=144$

[다른 풀이]
각 부분집합에서 가장 작은 원소의 합은
$2\times2^5+2^2\times2^4+\cdots+2^6\times1=6\times2^6=384$
원소의 개수가 1, 2인 부분집합의 가장 작은 원소의 합은
$(2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)$
$+(2\times5+2^2\times4+2^3\times3+2^4\times2+2^5\times1)$
$=\dfrac{2\times(2^6-1)}{2-1}+(10+16+24+32+32)$
$=126+114=240$
따라서 $384-240=144$

30-2 $\dfrac{31}{16}$

$A=\left\{1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4^2},\ \dfrac{1}{4^3},\ \dfrac{1}{4^4}\right\}$
집합 A의 부분집합 중에서

(ⅰ) 가장 작은 원소가 $\dfrac{1}{4^4}$인 부분집합
$1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4^2},\ \dfrac{1}{4^3}$을 원소로 가질 수 있으므로
$2^4=16$개

(ⅱ) 가장 작은 원소가 $\dfrac{1}{4^3}$인 부분집합
$1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4^2}$을 원소로 가질 수 있으므로 $2^3=8$개

(ⅲ) 가장 작은 원소가 $\dfrac{1}{4^2}$인 부분집합
$1,\ \dfrac{1}{4}$을 원소로 가질 수 있으므로 $2^2=4$개

(ⅳ) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{4}$인 부분집합

1을 원소로 가질 수 있으므로 $2^1=2$개

(ⅴ) 가장 작은 원소가 1인 부분집합

$\{1\}$뿐이므로 1개

따라서 집합 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_n의 원소 중에서 가장 작은 원소를 뽑아 모두 더한 값은

$\frac{1}{4^4}\times16+\frac{1}{4^3}\times8+\frac{1}{4^2}\times4+\frac{1}{4}\times2+1=\frac{31}{16}$

31-1 ④

조건 (가)에 의해 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $2a\notin A$이므로 a와 $2a$가 집합 A에 동시에 속할 수 없다.

a, $2a$가 모두 속하는 집합들로 집합 U를 나누어 보면 다음과 같다.

$\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{5, 10\}$, $\{7, 14\}$, $\{9, 18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$

각 집합에 속하는 모든 원소들을 크기 순서대로 나열 할 때, 이웃한 두 원소는 동시에 A에 속할 수 없다.

$\{1, 2, 4, 8, 16\}$에서 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{16\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 16\}$, $\{2, 8\}$, $\{2, 16\}$, $\{4, 16\}$, $\{1, 4, 16\}$이다.

이 중 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때는 $\{1, 4, 16\}\subset A$인 경우이다.

마찬가지 방법으로 $\{3, 6, 12\}$에서 $\{3, 12\}\subset A$이고 세 집합 $\{5, 10\}$, $\{7, 14\}$, $\{9, 18\}$에서는 각 집합의 두 원소 중 하나의 원소가 A에 속한다.

또한 집합 A의 원소의 개수가 최대가 되기 위해서는 11, 13, 15, 17, 19는 항상 A에 속해야 한다.

즉, $\{11, 13, 15, 17, 19\}\subset A$이다.

이상에서 반드시 포함되어야 하는 원소의 합은

$1+3+4+11+12+13+15+16+17+19=111$이다.

조건 (나)에 의해 각 집합 $\{5, 10\}$, $\{7, 14\}$, $\{9, 18\}$에서 한 개씩 선택한 원소의 합이 최대인 홀수가 되도록 5, 14, 18을 선택한다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은

$111+5+14+18=148$이다.

31-2 62

$12\in A$이면 $6\notin A$, $10\in A$이면 $5\notin A$, $8\in A$이면 $4\notin A$, $\cdots$

$\therefore\ A=\{12, 11, 10, 9, 8, 7, 3, 2\}$

집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은

$12+11+10+9+8+7+3+2=62$

32-1 10

집합 A의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A에 25 이상인 원소가 적어도 2개 포함되어 있어야 한다. 전체집합 U에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29뿐이다.

(ⅰ) 집합 A에 25 이상의 원소가 3개만 속한 경우

26, 28, 29가 속한 경우: $A=\{17, 26, 28, 29\}$

25, 26, 29가 속한 경우: $A=\{20, 25, 26, 29\}$

25, 28, 29 또는 25, 26, 28이 속한 경우:

원소의 합이 100이기 위해서는 나머지 한 원소가 3의 배수가 되어야 한다. 그런데 3의 배수는 전체집합 U의 원소가 아니므로 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.

(ⅱ) 집합 A에 25 이상의 원소가 2개만 속한 경우

25보다 작은 전체집합 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은 $22+23=45$이다. 그러므로 네 원소의 합이 100이 되기 위해서는 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.

28, 29가 속한 경우: $A=\{20, 23, 28, 29\}$

26, 29가 속한 경우: $A=\{22, 23, 26, 29\}$

따라서 위의 네 집합에 대하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값은 각각 10, 8, 4, 4이고 이 중 최댓값은 10이다.

[다른 풀이]

$x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서 $x_1+x_3=100-(x_2+x_4)$

$x_4-x_3+x_2-x_1=x_4+x_2-(x_3+x_1)$

$=x_4+x_2-\{100-(x_2+x_4)\}=2(x_2+x_4)-100$

이 값이 최대가 되기 위해서는 x_2+x_4의 값이 최대가 되어야 하므로 $x_4=29$이다.

그런데 $x_4>x_3>x_2$에서 x_2는 28이 될 수 없으므로 $x_3=28$, $x_2=26$이다.

따라서 최댓값은 $2\times(29+26)-100=10$이다.

32-2 2

$x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서 $x_2+x_3=100-(x_1+x_4)$

$x_1-x_2-x_3+x_4=2(x_1+x_4)-100$

이 값이 최대가 되기 위해서는 x_1+x_4의 값이 최대가 되어야 하므로 $x_4=29$이다.

$x_1+x_2+x_3+29=100$에서 $x_1+x_2+x_3=71$이고

$x_1<x_2<x_3$를 만족하면서 x_1의 값이 최대가 되려면

$x_1=22$, $x_2=23$, $x_3=26$일 때이다.

따라서 최댓값은 $2\times(22+29)-100=2$이다.

33-1 ③

$S(A)=a+b+c+d+e=37$

$S(B)=a+b+c+d+e+5k=37+5k$

$S(B)=S(A\cup B)-S(A-B)$

$37+5k=92-15$ 따라서 $k=8$

[참고]

$A=\{2, 4, 9, 10, 12\}$, $B=\{10, 12, 17, 18, 20\}$

33-2 84

$A=\{a, b, c, d\}$라 하면 $a+b+c+d=27$ ……㉠

$B=\{a+k+1, b+k+1, c+k+1, d+k+1\}$이므로

B의 모든 원소의 합은 $(a+b+c+d)+4k+4$

따라서 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$2(a+b+c+d)+4k+4-(8+11)=47$

$\therefore\ k=2$

$8\in A,\ 11\in A$ 이므로 $11\in B,\ 14\in B$

이고 $8\in B$이므로 $5\in A$이다.

$A=\{5,\ 8,\ 11,\ d\}$라 하면 ㉠에서 $d=3$

따라서 $B=\{6,\ 8,\ 11,\ 14\}$

$B-A=\{6,\ 14\}$이므로 모든 원소의 곱은 $6\times 14=84$

34-1 ①

$A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$B=\{x\,|\,x$는 6 이상 15 이하의 자연수$\}$

$=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

에서

$A-B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap B=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

이므로

$n(A-B)=5$, $n(A\cap B)=5$

$X_1=X\cap(A-B)$, $X_2=X\cap(A\cap B)$ 라 하면

$X=X_1\cup X_2$ 이고 $X_1\cap X_2=\varnothing$ 이다.

(ⅰ) $n(X\cup B)=12$ 이고 $n(B)=10$ 이므로

$n(X_1)=\boxed{2}$

집합 X_1은 집합 $A-B$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합이므로 가능한 집합 X_1의 개수는

$\boxed{10}$이다.

(ⅱ) 집합 X_2는 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 가능한 집합

X_2의 개수는 $2^5=\boxed{32}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 집합 X의 개수는 집합 X_1을 정하는 경우의 수와 집합 X_2를 정하는 경우의 수의 곱과 같으므로

$\boxed{10}\times\boxed{32}=320$

따라서 $p=2,\ q=10,\ r=32$ 이므로

$p+q+r=44$

34-2 최대 : 49, 최소 : 3

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$B=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

$A\cap B=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A-B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$n(A\cap B)=5$, $n(B)=10$, $n(X\cup B)=12$이므로

$2\le n(X)\le 7$이다.

(ⅰ) $S(X)$가 최대일 때,

집합 X는 $A\cap B$의 모든 원소 및 $A-B$의 원소 중 큰 값 2개를 갖는다.

따라서 $X=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$\therefore\ S(X)$의 최댓값은 49

(ⅱ) $S(X)$가 최소일 때

$n(X)=2$이고, $A-B$의 원소 중 제일 작은 값 2개를 갖는다.

$\therefore\ X=\{1,\ 2\}$이므로 $S(X)$의 최솟값은 3이다.

35-1 정답 ②

은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라 하면 조건 (가)에서

$n(A)+n(B)=82$

$n(A\cup B)=65$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=82-65$

$=17$

따라서 한 은행만 이용하는 고객의 수는 $65-17=48$이고 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 각각 24명이다.

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-24=6$ 이다.

[다른 풀이]

조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수가 같으므로 이를 x라 하면 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 남자 고객의 수는 $35-x$ 이고, 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-x$ 이다.

조건 (가)에서

$\{x+2(35-x)\}+\{x+2(30-x)\}=82$

$2x+(70-2x)+(60-2x)=82$

$2x=48$

$x=24$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-24=6$ 이다.

35-2 9

남자 35명 중 두 은행 A, B를 모두 이용하는 고객수를 x명, 여자 40명 중 두 은행 A, B를 모두 이용하는 고객수를 y명이라 하면

(가)에서 $(35+x)+(40+y)=88$이므로 $x+y=13$

(나)에서 $35-x=40-y$이므로 $y-x=5$

두 식을 연립하면 $x=4$, $y=9$

36-1 정답 ②

집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로 x는 20 이하의 자연수이고 $y-k$는 30의 약수이다.

$y\in U$이므로 $y-k<30$ 이고 $x\ne 1$

$x\in U$이므로 $x\ne 30$

$y-k$와 x 사이의 관계는 아래 표와 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

$A_k\subset\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15\}$

$\dfrac{30-x}{5}\in U$에서 $30-x$는 5의 배수이므로

$B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$

$(A_k\cap B^c)\subset\{2,\ 3,\ 6\}$

(ⅰ) $2\in\left(A_k\cap B^c\right)$일 때

$x=2,\ y-k=15$이고 $y=15+k\le 20$

$k\le 5$

(ⅱ) $3\in\left(A_k\cap B^c\right)$일 때

$x=3,\ y-k=10$이고 $y=10+k\le 20$

$k\le 10$

(ⅲ) $6\in\left(A_k\cap B^c\right)$일 때

$x=6,\ y-k=5$이고 $y=5+k\le 20$

$k\le 15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$k\le 5$일 때 $A_k\cap B^c=\{2,\ 3,\ 6\}$

$5<k\le 10$일 때 $A_k\cap B^c=\{3,\ 6\}$

$10<k\le 15$일 때 $A_k\cap B^c=\{6\}$

$n\left(A_k\cap B^c\right)=1$이므로 $10<k\le 15$

따라서 모든 자연수 k의 개수는 5

36-2 27

집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로

x는 자연수이고 $x-k$는 20의 약수이다.

$x-k=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20$

$x=k+1,\ k+2,\ k+4,\ k+5,\ k+10,\ k+20$

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21\}$

$n\left(B\cap {A_k}^C\right)=4$

$n\left(B-A_k\right)=4$

집합 B는 3의 배수이므로 3씩 증가한다.

집합 A_k의 원소 중 3씩 증가 하는 것은

$k+1,\ k+4$ 또는 $k+2,\ k+5$이다.

$k+1$과 $k+4$가 집합 B에 속하는 k의 값은

2, 5, 8, 11이다.

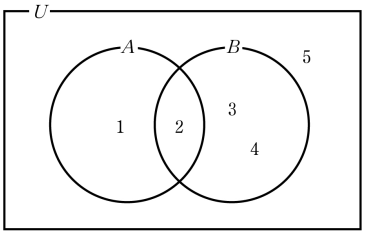
$k+2$과 $k+5$가 집합 B에 속하는 k의 값은

1이다.

따라서 만족하는 k의 값의 합은 $2+5+8+11+1=27$이다.

37-1 22

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$A\cap B=\{2\}$이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $2\in X$인 경우

이때 $X\cap A\ne\varnothing$, $X\cap B\ne\varnothing$을 만족시킨다.

그러므로 집합 X는 전체집합 U의 2가 아닌 원소인 1, 3, 4, 5의 일부 또는 전부를 원소로 갖거나 어느 것도 원소로 갖지 않을 수 있다. 따라서 $2\in X$인 경우의 집합 X의 개수는 집합

$\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

(ⅱ) $2\notin X$인 경우

2를 제외한 집합 A의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B의 원소는 3, 4이므로 $X\cap A\ne\varnothing$, $X\cap B\ne\varnothing$을 만족시키려면 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.

이때 $1\in X,\ 3\in X,\ 4\notin X$인 경우와 $1\in X,\ 3\notin X,$ $4\in X$인 경우와 $1\in X,\ 3\in X,\ 4\in X$인 경우의 3가지 경우가 있다.

이때 각 경우에서 집합 X는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있다.

따라서 $2\notin X$인 경우의 집합 X의 개수는

$3\times 2=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는

$16+6=22$

37-2 220

$X\cap A\ne\varnothing$, $X\cap B\ne\varnothing$를 부정하면 $X\cap A=\varnothing$ 또는 $X\cap B=\varnothing$이므로

$X\cap A=\varnothing$인 부분집합 X의 개수는 $2^5=32$

$X\cap B=\varnothing$인 부분집합 X의 개수는 $2^3=8$

$X\cap(A\cup B)=\varnothing$인 부분집합 X의 개수는 $2^2=4$이므로

$X\cap A=\varnothing$ 또는 $X\cap B=\varnothing$인 부분집합 X의 개수는

$2^5+2^3-2^2=36$

모든 부분집합의 개수에서 이를 빼주면 되므로

$2^8-36=220$

38-1 ③

ㄱ. $A_1\cap A_2\cap A_3$

$=\{x\,|\,0\le x\le 2\}\cap\{x\,|\,1\le x\le 3\}\cap\{x\,|\,2\le x\le 4\}$

$=\{2\}$ (참)

ㄴ. $|l-m|\le 2$를 만족시키는 9 이하의 자연수 $l,\ m$에 대하여 $l\le m$이라 하여도 일반성을 잃지 않는다.

(ⅰ) $|l-m|=0$일 때

$m=l$이고 $A_l\cap A_m=A_l\ne\varnothing$

(ⅱ) $|l-m|=1$일 때

$m=l+1$이고

$A_l\cap A_m=A_l\cap A_{l+1}=\{x|l\le x\le l+1\}\ne\varnothing$

(ⅲ) $|l-m|=2$일 때

$m=l+2$이고

$A_l\cap A_m=A_l\cap A_{l+2}=\{l+1\}\ne\varnothing$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 9 이하의 두 자연수 $l,\ m$에 대하여 $|l-m|\le 2$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다. (참)

ㄷ. 9 이하인 자연수 n에 대하여 집합 $\{p\}\,(n-1\le p\le n+1)$이 $\{p\}\cap A_n\ne\varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인

집합이다.

8 이하인 자연수 n에 대하여

$A_n \cap A_{n+1} = \{x | n \le x \le n+1\}$이고 집합

$\{p\}(n \le p \le n+1)$이 $\{p\} \cap (A_n \cap A_{n+1}) \ne \varnothing$을

만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}과 서로소가 아니고

원소의 개수가 최소인 집합이다.

7 이하인 자연수 n에 대하여

$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} = \{n+1\}$이고

$\{n+1\} \cap (A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2}) \ne \varnothing$이므로 집합 $\{n+1\}$은

A_n, A_{n+1}, A_{n+2}와 서로소가 아니고 원소의 개수가

최소인 집합이다.

6 이하인 자연수 n에 대하여

$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} = \varnothing$이므로 A_n, A_{n+1}, A_{n+2},

A_{n+3}과 서로소가 아닌 집합 중 원소의 개수가 1인

집합은 존재하지 않는다.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$,

$A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{3\}$,

$A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{4\}$,

$\vdots$

$A_7 \cap A_8 \cap A_9 = \{8\}$

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이라 하면 집합 X는 모든

A_k와 서로소가 아니다.

모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중

원소의 개수가 최소인 집합을 B라 하면

$B \subset X$

$2 \notin B$이면 $A_1 \cap B = \varnothing$이므로 $2 \in B$이어야 한다.

$8 \notin B$이면 $A_9 \cap B = \varnothing$이므로 $8 \in B$이어야 한다.

$\{2, 8\} \cap A_4 = \varnothing$, $\{2, 8\} \cap A_5 = \varnothing$

$\{2, 8\} \cap A_6 = \varnothing$

이고 $A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \{5\}$이므로 $5 \in B$이어야 한다.

$B = \{2, 5, 8\}$에 대하여 집합 B의 원소의 개수는 3이고

집합 B는 모든 A_k와 서로소가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

38-2 ⑤

ㄱ. $A_1 = \{x \mid 1 \le x \le 21\}, \cdots,$

$A_5 = \{x \mid 21 \le x \le 41\}$이므로

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{21\}$ (참)

ㄴ. $|l-m| \le 4$를 만족시키는 15 이하의 두 자연수 l, m에

대하여 $l \le m$이라 하여도 일반성을 잃지 않는다.

(ⅰ) $|l-m| = 0$일 때 $m = l$이고

$A_l \cap A_m = A_l \ne \varnothing$

(ⅱ) $|l-m| = 1$일 때 $m = l+1$이고

$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+1} = \{x \mid 5l+1 \le x \le 5l+16\} \ne \varnothing$

(ⅲ) $|l-m| = 2$일 때 $m = l+2$이고

$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+2} = \{x \mid 5l+6 \le x \le 5l+16\} \ne \varnothing$

(ⅳ) $|l-m| = 3$일 때 $m = l+3$이고

$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+3}$

$= \{x \mid 5l+11 \le x \le 5l+16\} \ne \varnothing$

(ⅴ) $|l-m| = 4$일 때 $m = l+4$이고

$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+4} = \{5l+16\} \ne \varnothing$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 15 이하의 두 자연수 l, m에 대하여

$|l-m| \le 4$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다.

(참)

ㄷ. ㄱ에 의하여

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{21\}$,

$A_6 \cap A_7 \cap A_8 \cap A_9 \cap A_{10} = \{46\}$

$A_{11} \cap A_{12} \cap A_{13} \cap A_{14} \cap A_{15} = \{71\}$,

이므로 $\{21, 46, 71\}$이면

모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중

원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39-1 63

조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여

$S(A) - S(B)$의 값이 최대가 되려면 $S(A)$의 값이 최대이고

$S(B)$의 값이 최소이어야 한다.

9로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로

나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	$\{1, 10, 19\}$	8	$\{8, 17\}$
2	$\{2, 11, 20\}$	7	$\{7, 16\}$
3	$\{3, 12\}$	6	$\{6, 15\}$
4	$\{4, 13\}$	5	$\{5, 14\}$
0	$\{9\}$	0	$\{18\}$

나머지의 합이 0 또는 9가 되는 두 부분집합 중 한 집합의

원소들만 집합 A에 속할 수 있다.

따라서 $S(A)$가 최대가 되려면 집합 U의 부분집합

$\{1, 10, 19\}$, $\{2, 11, 20\}$, $\{6, 15\}$, $\{5, 14\}$, $\{18\}$의 원소 중

큰 수부터 차례대로 집합 A의 원소가 되어야 한다.

조건 (가)에서 $n(A) = 8$이므로

$S(A)$가 최대가 되기 위해 가능한 집합 A는

$\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$ …… ㉠

10으로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을

표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	$\{1, 11\}$	9	$\{9, 19\}$
2	$\{2, 12\}$	8	$\{8, 18\}$
3	$\{3, 13\}$	7	$\{7, 17\}$
4	$\{4, 14\}$	6	$\{6, 16\}$
5	$\{5\}$	5	$\{15\}$
0	$\{10\}$	0	$\{20\}$

나머지의 합이 0 또는 10이 되는 두 부분집합 중 한 집합의

원소들만 집합 B에 속할 수 있다.

따라서 $S(B)$가 최소가 되려면 집합 U의 부분집합 $\{1, 11\}$,

$\{2, 12\}$, $\{3, 13\}$, $\{4, 14\}$, $\{5\}$, $\{10\}$의 원소 중 작은 수부터

차례대로 집합 B의 원소가 되어야 한다.

조건 (가)에서 $n(B) = 8$이므로

$S(B)$가 최소가 되기 위해 가능한 집합 B는

$\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서

조건 (가)의 $n(A\cap B)=1$을 만족시키려면
$10,\ 11$은 동시에 집합 $A\cap B$에 속할 수 없다.
$10\ni B,\ 11\in B$ 이면 $10\not\in A$ 또는 $11\not\in A$이다.
이때 $1,\ 2,\ 5$ 중 적어도 하나가
집합 A에 속해야 하므로 $n(A\cap B)\neq 1$이 되어 조건 (가)를
만족시키지 않는다.
$S(B)$가 최소가 되려면 $10\in B,\ 11\not\in B$이어야 한다.
따라서

$A=\{6,\ 10,\ 11,\ 14,\ 15,\ 18,\ 19,\ 20\}$,
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ 12,\ 13\}$일 때

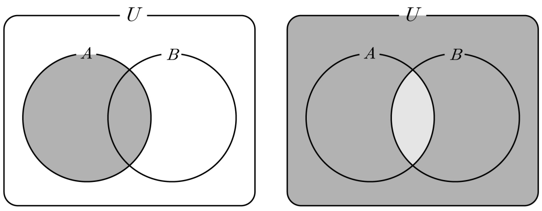
$S(A)-S(B)$의 최댓값은 63이다.

39-2 88

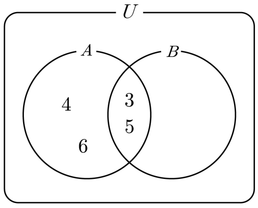
$S(X)-S(Y)$가 최대가 되려면 $S(X)$의 값이 최대, $S(Y)$의 값이 최소가 되어야 한다.
(조건2)에서 $k\in X$일 때, k를 제외한 k의 약수와 배수가 집합 X의 원소가 아니어야 한다.
$9,\ 10,\ \cdots,\ 17$은 서로 나누어떨어지지 않으므로
집합 X는 $9,\ 10,\ \cdots,\ 17$를 원소로 가져야 한다.
($1,\ 2,\ \cdots,\ 8$은 위의 수의 약수에 포함되므로 집합 X의 원소가 될 수 없다.)
또한, $n(X\cup Y)=13,\ n(X\cap Y)=2$이므로
$S(Y)$가 최솟값을 가지려면
집합 Y는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10$을 원소로 가져야 한다.
따라서 $X=\{9,\ 10,\ \cdots,\ 17\},\ Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$일 때,
$S(X)-S(Y)=88$의 최댓값을 갖는다.

40-1 11

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로
$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4\}$
두 집합 $A,\ (A\cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.



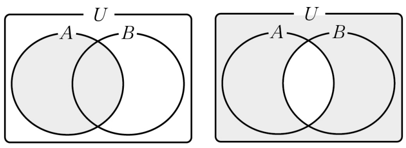
두 집합 $A,\ (A\cap B)^C$의 공통인 원소는 4이고, 두 그림에서 공통으로 색칠된 부분이 집합 $A-B$이므로
$A-B=\{4\}$이다.
또한
$A\cap B=A-(A-B)=\{3,\ 5\}$
$U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$



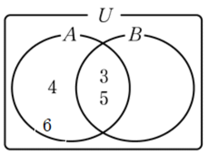
이때 $4\not\in B$이고, $3\in B,\ 5\in B$이다.
조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여
$(A\cup X)-B=(A\cup X)\cap B^C$
$=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)$
$=(A-B)\cup(X-B)$
$=\{4\}\cup(X-B)$
$4\in(A-B)$이므로 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이 되려면
집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 $\{4\}$가 되어야 한다.
(ⅰ) $X=\{1\},\ X=\{2\},\ X=\{3\},\ X=\{5\}$일 때,
집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로
$1,\ 2,\ 3,\ 5$ 모두 집합 B의 원소이어야 한다.
(ⅱ) $X=\{4\}$일 때,
$X-B=\{4\}$이므로 집합 $\{4\}\cup(X-B)$는 집합 $\{4\}$가 되어 조건을 만족시킨다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이다.
따라서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+2+3+5=11$이다.

40-2 17

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로
$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$
두 집합 $A,\ (A\cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.



두 집합 $A,\ (A\cap B)^C$의 공통인 원소는 $4,\ 6$이고, 두 그림에서 공통으로 색칠된 부분이 집합 $A-B$이므로
$A-B=\{4,\ 6\}$이다.
또한 $A\cap B=A-(A-B)=\{3,\ 5\}$
$U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$



이때 $4\not\in B,\ 6\not\in B$이고, $3\in B,\ 5\in B$이다.
조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여
$(A\cup X)-B=(A\cup X)\cap B^C=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)$
$=(A-B)\cup(X-B)$
$=\{4,\ 6\}\cup(X-B)$
$4\in(A-B),\ 6\in(A-B)$므로 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의

개수가 2이 되려면
집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 $\{4\}$ 또는 $\{6\}$ 또는 $\{4, 6\}$이 되어야 한다.

(i) $X=\{1\}$, $X=\{2\}$, $X=\{3\}$, $X=\{5\}$일 때,
집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로
1, 2, 3, 5 모두 집합 B의 원소이어야 한다.

(ii) $X=\{4\}$일 때,
$X-B=\{4\}$이므로 집합 $\{4, 6\}\cup(X-B)$는 집합 $\{4, 6\}$가 되어 조건을 만족시킨다. $X=\{6\}$도 마찬가지로 성립한다.

(i), (ii)에서 $B=\{1, 2, 3, 5\}$이다.
따라서 $B=\{1, 2, 3, 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+2+3+5=11$이다.

41-1 ②

$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고
조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로
$A-X=B-X\subset A\cap B=\{3, 4, 5\}$
$A-X\subset\{3, 4, 5\}$에서 $\{1, 2\}\subset X$이고
$B-X\subset\{3, 4, 5\}$에서 $\{6, 7\}\subset X$이므로
$\{1, 2, 6, 7\}\subset X$ …… ㉠
조건 (다)에서
$(X-A)\cap(X-B)$
$=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)$
$=X\cap(A^C\cap B^C)$
$=X\cap(A\cup B)^C$
$=X\cap\{8, 9, 10\}\neq\varnothing$ …… ㉡
조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여
$n(X\cap\{3, 4, 5, 8, 9, 10\})=2$ …… ㉢
㉡에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.
집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8\in X$이고
㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로 $3\in X$ 따라서
$X=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은
$1+2+3+6+7+8=27$

41-2 30

$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고
조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로
$A-X=B-X\subset A\cap B=\{3, 4, 5, 6\}$
$A-X\subset\{3, 4, 5, 6\}$에서 $\{1, 2\}\subset X$이고
$B-X\subset\{3, 4, 5, 6\}$에서 $\{7, 8\}\subset X$이므로
$\{1, 2, 7, 8\}\subset X$ …… ㉠
조건 (다)에서
$(X-A)\cap(X-B)$
$=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)$
$=X\cap(A^C\cap B^C)$
$=X\cap(A\cup B)^C$
$=X\cap\{9, 10\}\neq\varnothing$ …… ㉡
조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여
$n(X\cap\{3, 4, 5, 6, 9, 10\})=2$ …… ㉢
㉡에 의하여 세 원소 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.
집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $9\in X$이고
㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 6, 10중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로 $3\in X$ 따라서
$X=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은
$1+2+3+7+8+9=30$

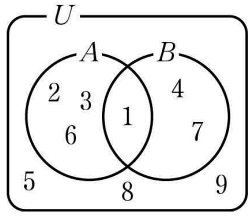
42-1 ⑤

드모르간의 법칙에 의하여
$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이므로 조건 (가)에서
$n(A\cup B^C)=n((B-A)^C)=7$
$B-A=\{4, 7\}$에서 $n(B-A)=2$
$(B-A)\cup(B-A)^C=U$, $(B-A)\cap(B-A)^C=\varnothing$
이므로
$n(U)=n(B-A)+n((B-A)^C)$
$\quad=n(B-A)+n(A\cup B^C)$
$\quad=2+7=9$
그러므로 $k=9$이고 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
조건 (가)에서 $B-A=\{4, 7\}$이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A=\{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11이다.
따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(i) $m=6$일 때
집합 A는 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.
이때 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의 원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m=9$일 때
집합 A는 $\{1, 3, 9\}$이다.
이때 집합 $A-B$의 원소의 합이 11인 경우는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=6$이고 이때 $B=\{1, 4, 7\}$이다.
즉, $A\cup B=\{1, 2, 3, 6\}\cup\{1, 4, 7\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$



$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5, 8, 9\}$이므로
집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은
$5+8+9=22$

42-2 18

$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이므로 조건 (가)에서

$n(A\cup B^C)=n((B-A)^C)=7$

$B-A=\{3,\ 5,\ 6\}$에서 $n(B-A)=3$

$(B-A)\cup(B-A)^C=U,\ (B-A)\cap(B-A)^C=\varnothing$

이므로

$n(U)=n(B-A)+n((B-A)^C)$

$\quad=n(B-A)+n(A\cup B^C)$

$\quad=3+7=10$

그러므로 $k=10$이고 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

조건 (가)에서 $B-A=\{3,\ 5,\ 6\}$이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A=\{3,\ 5,\ 6\}$의 모든 원소의 합인 14이다.

따라서 m은 3, 5, 6중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 14 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 8이다.

$m=8$일 때 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이다.

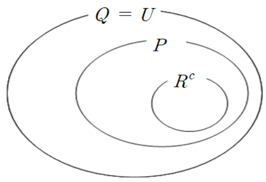
이때 $A-B=\{2,\ 4,\ 8\}$이면 집합 $A-B$의 원소의 합이 14이므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 $k+m=10+8=18$

02. 명제

43-1 ③

조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합 $P,\ Q,\ R$ 에 대하여 주어진 참인 명제에 따른 $P,\ Q,\ R$의 포함관계는 다음 벤다이어그램과 같다.



$P-R=R^c$이므로 ㄴ만 거짓

43-2 ②

ㄱ. $P\cap Q^C=Q^C\supset R$이므로 거짓이다.

ㄴ. $s\to r$이므로 $S\subset R$

$\therefore S-R=\varnothing$ (참)

ㄷ. $s\to\sim q$이므로 $S\subset Q^C$이지만

$q\to\sim r$에서 대우는 $r\to\sim q$이고

$R\subset Q^C$이지만 $R^C\not\subset Q^C$이므로 $(S\cup R^C)\subset Q^C$는 거짓이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

44-1 ③

ㄱ. ($\Rightarrow$) $x,\ y$ 가 0 이 아니므로 양변을 xy 로 나누면 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$이다.

($\Leftarrow$)양변에 xy 를 곱하면 $x+y=xy$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄴ. ($\Rightarrow$) $0<x<y$ 이면 $0<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$이다.

($\Leftarrow$) $0<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$ 이면 $0<x<y$이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄷ. ($\Rightarrow$) (반례) $x=2,\ y=2,\ z=1$

($\Leftarrow$) $x=y=z$이면 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

44-2 ㄱ, ㄴ

p의 진리집합을 P, q의 진리집합을 Q라 하자.

ㄱ. $P=Q$이므로 p가 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. 조건 p를 만족하는 $x,\ y$는 모든 실수이다.

조건 q를 만족하는 $x,\ y$는 모든 실수이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $p : x>y$ or $x<-y$이므로

p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $p : x \neq -\frac{1}{2}$인 모든 실수이고,

$q : x \neq \frac{1}{2}$인 모든 실수이므로

두 조건은 아무 관계도 아니다.

ㅁ. $p : xy \geq 0$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 2개다.

45-1 ②

조건 '$p(x)$ 또는 $\sim q(x)$'의 진리집합은 $P \cup Q^C$이므로 모든 x에 대하여 주어진 조건이 참이면 $P \cup Q^C = U$이다.

$(P \cup Q^C)^C = U^C$이므로 드모르간의 법칙에 의하여

$P^C \cap Q = \phi$ 이다.

45-2 56

'$x \in A$인 모든 x에 대하여 x는 짝수이다.'이므로 집합 A는 짝수인 원소들로 이루어진 집합으로

$\{2\}$, $\{4\}$, $\{2, 4\}$ 셋 중의 하나이다.

한편, '$x \in B$인 어떤 x에 대하여 $x \in A$이다.'이므로

집합 B는 집합 A가 갖고 있는 짝수인 원소를 적어도 한개는 가지고 있어야 한다.

(ⅰ) $A = \{2\}$인 경우

집합 B는 2를 반드시 원소로 갖는 집합 X의 부분집합이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$2^{5-1} = 2^4 = 16$개다.

(ⅱ) $A = \{4\}$인 경우

집합 B는 4를 반드시 원소로 갖는 집합 X의 부분집합이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$2^{5-1} = 2^4 = 16$개다.

(ⅲ) $A = \{2, 4\}$인 경우

집합 B는 2, 4 중 적어도 어느 하나를 반드시 원소로 갖는 집합 X의 부분집합이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$개다.

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)에서 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는 $16+16+24=56$개

46-1 ③

조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니므로 $p \to q$는 참이고 $q \to p$는 거짓이다.

ㄱ. $x=0$이고, $y=0$이면 $|0+0| = |0-0|$

$\therefore$ $p \to q$는 참

그러나, $x=3$, $y=0$이면

$|3+0| = |3-0|$이지만 $x \neq 0$이므로 $q \to p$는 (거짓)

ㄴ. $x > y > z$이면 $x-y>0$, $y-z>0$,

$z-x<0$이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)<0$

$\therefore$ $p \to q$는 (참)

그러나 $x=2, y=1, z=5$ 일 때,

$(x-y)(y-z)(z-x) = -12 < 0$ 이지만

$z > x > y$ 이므로 $q \to p$는 거짓

ㄷ. $|x|+|y| > |x+y|$

$\Leftrightarrow (|x|+|y|)^2 > |x+y|^2$

$\Leftrightarrow x^2+2|x||y|+y^2 > x^2+2xy+y^2$

$\Leftrightarrow |xy| > xy$

$\Leftrightarrow xy < 0$

$\therefore$ $p \to q$와 $q \to p$는 모두 (참)

따라서 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

46-2 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $p : |a+b|=0 \Leftrightarrow a=-b$

$q : a^3+b^3=0 \Leftrightarrow a=-b$

$\therefore p \Leftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다. (거짓)

ㄴ. $p : |a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$

$q : a^2-2ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b$

$\therefore p \Rightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄷ. $p : |a+b| \geq |a-b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

$q : |b-a| \geq |b|-|a|$

(모든 실수 a, b에 대하여 성립)

$\therefore p \Rightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

따라서 두 실수 a, b에 대하여 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

47-1 ④

p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하자.

$x \in P$이면 x가 정수이고 정수 전체의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로 x^2, x^3, x^4도 정수이다. 따라서 $x \in Q$, $x \in R$, $x \in S$이므로

$P \subset Q$, $P \subset R$, $P \subset S$이다. 같은 방법으로 $Q \subset S$이다.

ㄱ. [반례] $x = \sqrt[3]{2}$이면 $x^3(=2)$은 정수이지만 $x^4(=2\sqrt[3]{2})$은 정수가 아니다. (거짓)

ㄴ. $P \cap R = P \subset Q$ (참)

ㄷ. $P \cup S = S \supset Q$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

47-2 ③

$p \to q$, $q \to s$, $s \to r$, $r \to q$이므로 $P \subset R = S = Q$ 이다.

ㄱ. $P \subset S$이므로 $P - S = \varnothing$이다. (참)

ㄴ. $(R^C \cup P) = U$은 $R \cap P^C = \varnothing$이다.

$R \not\subset P$이므로 거짓이다. (거짓)

ㄷ. $Q = S$이므로 $(Q \cap S) \cup P^C = Q \cup P^C$

$Q \cup P^C = U$은 $Q^C \cap P = \varnothing$이다.

$P \subset Q$이므로 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

48-1 ④

명제 '$k-1 \leq x \leq k+3$인 어떤 실수 x에 대하여

$0 \le x \le 2$이다.'에서

조건 $k-1 \le x \le k+3$의 진리집합을

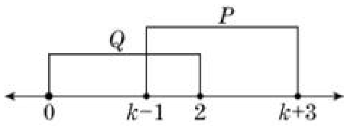
$P=\{x \mid k-1 \le x \le k+3\}$

조건 $0 \le x \le 2$의 진리집합을 $Q=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$라 하자. 주어진 명제가 참이 되려면 진리집합 P에 속하는 원소 중에서 진리집합 Q에 속하는 원소가 존재한다는 것을 의미한다.

즉, 주어진 명제가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \varnothing$이어야 한다.

따라서 두 진리집합 P와 Q를 수직선 위에 나타내어 보면 다음의 2가지 경우 중 하나이다.

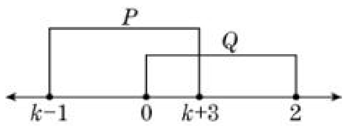
(ⅰ) $k-1 \ge 0$인 경우



$k-1 \le 2,\ k \le 3$

$\therefore\ 1 \le k \le 3$

(ⅱ) $k-1 < 0$인 경우



$0 \le k+3,\ k \ge -3$

$\therefore -3 \le k < 1$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 $-3 \le k \le 3$이다.

따라서 $-3 \le k \le 3$를 만족하는 정수는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개다.

[참고]

일반적으로 전체집합 U에서의 조건 p에 대하여

'모든 x에 대하여 p이다.', '어떤 x에 대하여 p이다.'

와 같은 문장은 참, 거짓이 구별되므로 명제라고 할 수 있다.

한편, 조건 p의 진리집합을 P라 할 때,

'모든 x에 대하여 p이다.'가 참이 되기 위해서는

$P=U$이어야 하고, '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이 되기 위해서는 $P \neq \varnothing$ 이어야 한다.

48-2 13

$\begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \le 5$이므로 $f(5)=g(3)=0$이다.

$f(5)=50+5a+b=0$

$g(3)=-27+9b+5a-3=0$

위의 두 식을 연립하면 $a=-12,\ b=10$

$f(x)=2x^2-12x+10,\ g(x)=-3x^2+30x-63$

$f(x)+g(x)=-x^2+18x-53>3$

$h(x)=-x^2+18x-56=-(x-4)(x-14)$라 하면

$k-1 \le x \le k+3$인 어떤 실수 x에 대하여

$-(x-4)(x-14)>0$이므로

$4<k+3,\ k-1<14$

$\therefore\ 1<k<15$

그러므로 정수 k의 개수는 13개

49-1 ⑤

조건 $p: |a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=b=0$

조건 $q: a^2-2ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b$

조건 $r: |a+b|=|a-b| \Leftrightarrow |a+b|^2=|a-b|^2$

$\Leftrightarrow ab=0$

$\Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. p는 q이기 위한 충분조건 (참)

ㄴ. $\sim p: a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

$\sim r: a \neq 0$이고 $b \neq 0$이므로

$\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건 (참)

ㄷ. q이고 r이면 $a=b=0$이므로

q이고 r은 p이기 위한 필요충분조건 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

49-2 ⑤

ㄱ. $p: |a|+|b|=0 \quad q: |a+b|=|a-b|$

조건 p는 $a=b=0$, 조건 q는 $a=0$ 또는 $b=0$이므로

조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 경우이다.

ㄴ. $p: a+b \ge 2 \qquad q: a \ge 1$ 또는 $b \ge 1$

명제 p이면 q이다의 대우에서 $a<1,\ b<1$이면 $a+b<2$이지만 명제 p이면 q이다의 역은

$a=1,\ b=-10$인 경우에 $a+b=-9$로 만족하지 않는다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 경우이다.

ㄷ. $p: a>b>c \qquad q: (a-b)(b-c)(c-a)<0$

조건 p가 성립하는 경우 q를 만족하지만

$a=1,\ b=3,\ c=2$인 경우 반례가 되므로 그 역을 성립하지 않아서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 경우이다.

50-1 256

$x^2 \le 2x+8$에서 $(x+2)(x-4) \le 0$이므로

$-2 \le x \le 4$

$P \subset U$이므로 $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

명제 $\sim p \to r$가 참이므로 대우명제인 $\sim r \to p$도 참이다.

그러므로

$\sim r \Rightarrow p$에서 $R^C \subset P$, $p \Rightarrow q$에서 $P \subset Q$

집합 Q는 집합 P를 포함하므로 가능한 집합 Q의 개수는 2^4이다.

(ⅰ) $n(R^C)=0$인 경우

$R^C=\varnothing$이므로 $R=U$이다.

그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 1$이다.

(ⅱ) $n(R^C)=1$인 경우

$R^C=\{1\}$이면 $R=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.

이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 1$이다.

R^C이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.

그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 4$이다.

(ⅲ) $n(R^C)=2$인 경우

$R^C=\{1,\ 2\}$이면 $R=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.

이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.

R^C이 $\{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.

그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times6$이다.

(ⅳ) $n(R^C)=3$인 경우

$R^C=\{1,\ 2,\ 3\}$이면 $R=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.

이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.

R^C이 $\{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.

그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times4$이다.

(ⅴ) $n(R^C)=4$인 경우

$R^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이면 $R=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.

이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$2^4+4\times2^4+6\times2^4+4\times2^4+2^4=16\times2^4=256$이다.

50-2 9

$p: (x-3)(x-1)\le0,\ \ 1\le x\le3$

$q: (x-8)(x-6)<0,\ \ 6<x<8$

$Q\subset R,\ R\subset P^c$을 만족하는 k의 범위를 구하면

$3\le k\le6$

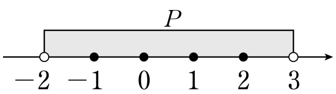
따라서 $M+m=9$

51-1 ②

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)<0$이므로

조건 $p: x^2-x-6<0$의 진리집합 P는

$P=\{x|-2<x<3\}$



$x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8$

$=x^2+(6-3a)x+2(a-1)(a-4)$

$=(x-2a+2)(x-a+4)$이므로

조건 $q: x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8\ge0$의 진리집합 Q는 a의 범위에 따라 각각 다음과 같다.

(ⅰ) $2a-2<a-4$일 때 즉, $a<-2$일 때,

$Q=\{x|x\le2a-2$ 또는 $x\ge a-4\}$

(ⅱ) $2a-2=a-4$일 때 즉, $a=-2$일 때,

$Q=\{x|x\ne-6$인 모든 실수$\}$

(ⅲ) $2a-2>a-4$일 때 즉, $a>-2$일 때,

$Q=\{x|x\le a-4$ 또는 $x\ge2a-2\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a\le-2$일 때

$P\cap Q=\{x|-2<x<3\}$이므로

두 조건 $p,\ q$를 모두 참이 되도록 하는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개이다.

(ⅲ)에서 $a>-2$일 때

두 조건 $p,\ q$를 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재하려면

$1<2a-2\le2$이거나 $-1\le a-4<0$이다.

따라서 $\frac{3}{2}<a\le2$ 또는 $3\le a<4$이므로

가능한 정수 a는 2 또는 3이다.

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 5이다.

51-2 12개

$f(x)=x^2-11x+n$이라 하면

$4\le x\le8$에서 $f(x)\ge0$인 x가 존재한다.

따라서 $f(4)\ge0$ 또는 $f(8)\ge0$이다.

$f(4)=16-44+n\ge0$

$n\ge28$

$f(8)=64-88+n\ge0$

$n\ge24$

이 둘 중 하나만 성립하면 되고

한편, 주어진 조건에서 $n\le35$이므로

$\therefore\ \ 24\le n\le35\qquad\therefore$ 12개

52-1 28

조건 $x^2-3x<0$의 진리집합을 P라 하면

$x(x-3)<0$에서 $0<x<3$이므로 $P=\{1,2\}$

명제 '집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-3x<0$이다.' 가 참이 되기 위해서는 집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

그러므로 $A=\{1\}$ 또는 $A=\{2\}$ 또는 $A=\{1,2\}$이다.

명제 '집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.' 가 참이 되기 위해서는 $A\cap B\ne\varnothing$이어야 한다.

(ⅰ) $A=\{1\}$인 경우

집합 B는 1을 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로

집합 B의 개수는 $2^3=8$

(ⅱ) $A=\{2\}$인 경우

집합 B는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로

집합 B의 개수는 $2^3=8$

(ⅲ) $A=\{1,2\}$인 경우

집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.

(ⅲ-가) 1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^2=4$

(ⅲ-나) 2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합 B의 개수는 $2^2=4$

(ⅲ-다) 1, 2를 모두 원소로 갖는 집합 B의 개수는 $2^2=4$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $8+8+(4+4+4)=28$

52-2 14

명제 (가)의 부정은 '집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-11x+18<0$이다' 이므로 $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합

중 원소의 개수가 2개인 부분집합 15개의 집합이 X에 해당된다.
명제 (나)의 부정은 '집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $x^2-5x \ge 0$이다' 이므로 집합 X는 $\{x \mid x \le 0$ 또는 $x \ge 5$, x는 정수$\}$와 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 교집합인 $\{5, 6, 7, 8\}$의 원소를 적어도 하나 가져야 하는 집합이다.
따라서 (가)의 부정을 참이 되게 하는 15개의 집합 중 $\{3, 4\}$인 1개의 집합을 제외하면 되므로 $15-1=14$

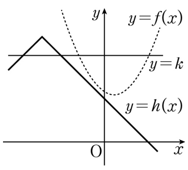
53-1 26

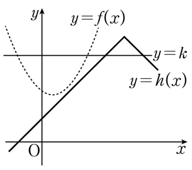
$f(x)=x^2-2x+6$
$\quad =(x-1)^2+5$
이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
한편,

$$-|x-t|+11=\begin{cases} x-t+11 & (x<t) \\ -x+t+11 & (x \ge t) \end{cases}$$

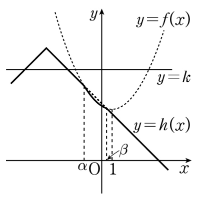
이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=t$에 대하여 대칭이다.
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 세 가지로

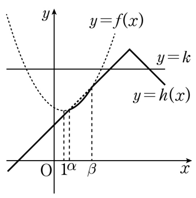
나타난다.
(ⅰ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때,



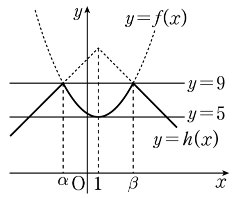


함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.
(ⅱ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(\alpha<\beta\le 1$ 또는 $1\le\alpha<\beta)$일 때,

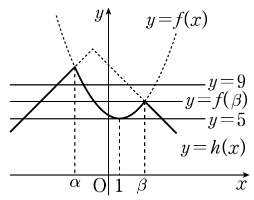




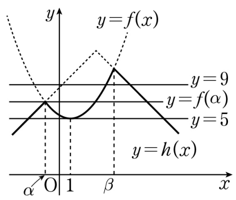
함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.
(ⅲ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(\alpha<1<\beta)$일 때,
① $f(\alpha)=f(\beta)$, 즉 $t=1$일 때,



두 교점은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
이때 β의 값을 구하면
$x^2-2x+6=-x+12$
$x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0$
$x=-2$ 또는 $x=3$
$\beta>1$이므로 $\beta=3$
$g(3)=-|3-1|+11=9$
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5뿐이다.
② $f(\alpha)>f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\beta)(5<f(\beta)<9)$이다.
③ $f(\alpha)<f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\alpha)(5<f(\alpha)<9)$이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 명제
'어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는
서로 다른 세 점에서 만난다.'
가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는
$5\le k<9$
따라서 자연수 k의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 합은
$5+6+7+8=26$

53-2 14

$f(x)=x^2+2x+3$
$\quad =(x+1)^2+2$
이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

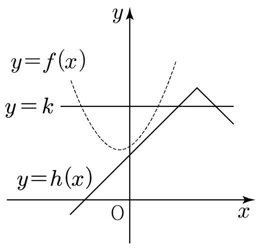
한편,

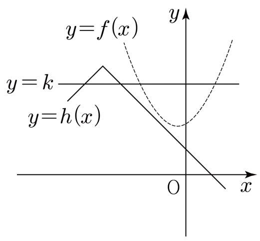
$$g(x)=\begin{cases} x-t+8 & (x<t) \\ -x+t+8 & (x \geq t) \end{cases} \ (t\text{는 실수})$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=t$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 세 가지로 나타난다.

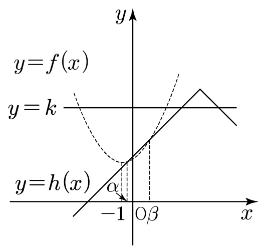
(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때,

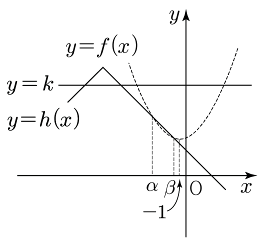




함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(-1 \leq \alpha < \beta$ 또는 $\alpha < \beta \leq -1)$일 때,

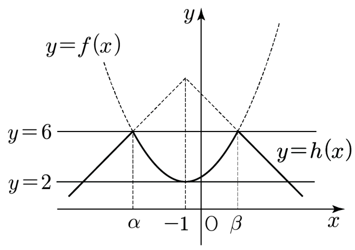




함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(\alpha < -1 < \beta)$일 때,

① $f(\alpha)=f(\beta)$, 즉 $t=-1$일 때,



두 교점은 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

이때 β의 값을 구하면

$x^2+2x+3=-x+7$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

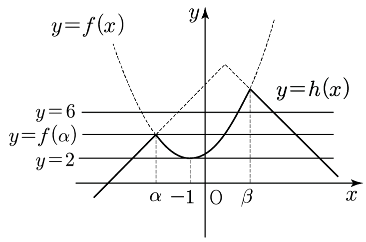
$x=-4$ 또는 $x=1$

$\beta>-1$이므로 $\beta=1$

$g(1)=6$

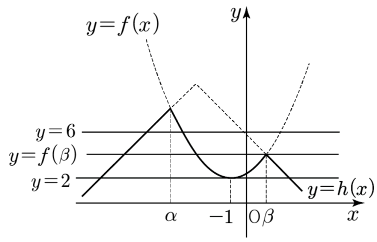
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 2뿐이다.

② $f(\alpha)<f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 2와 $f(\alpha)\ (2<f(\alpha)<6)$이다.

③ $f(\alpha)>f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 2와 $f(\beta)\ (2<f(\beta)<6)$이다.

(i)~(iii)에 의하여 명제

'어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'

가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$$2 \leq k < 6$$

따라서 자연수 k의 값은 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$2+3+4+5=14$$

54-1 ①

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1 \geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-1 \leq 0$$

$(a+1)(a-1) \leq 0$, $-1 \leq a \leq 1$

그러므로 정수 a는 -1, 0, 1이다.

이때 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P \subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로 $Q^C=U$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$$

$(b+3)(b-3)<0$, $-3<b<3$

그러므로 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3 \times 5=15$이다.

54-2 19개

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하면

$P=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

$Q=\left\{x \,\middle|\, a\geq 0\text{일 때, } x>\frac{a}{4} \text{ 또는 } x<-\frac{3}{4}a\right.$

$\left. a<0\text{일 때, } x<-\frac{3}{4}a \text{ 또는 } x>\frac{a}{4}\right\}$

$R=\left\{x \,\middle|\, b\geq 0\text{일 때, } -\frac{b}{4}\leq x\leq\frac{b}{4}\right.$

$\left. b<0\text{일 때, } \frac{b}{4}\leq x\leq -\frac{b}{4}\right\}$

q는 p이기 위한 필요조건이므로 $p\to q$ …… ㉠

r은 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$r\to\sim q,\quad q\to\sim r$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p\to q\to\sim r$이므로 $P\subset Q\subset R^C$

(ⅰ) $a\geq 0,\ b\geq 0$일 때,

$\frac{a}{4}<1,\ \frac{b}{4}\leq\frac{a}{4},\ -\frac{b}{4}\geq -\frac{3}{4}a$

이므로 $(a,\ b)$의 순서쌍은

$(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 0),$

$(3,\ 0),\ (3,\ 1),\ (3,\ 12)$의 10개

(ⅱ) $a\geq 0,\ b<0$일 때,

$\frac{a}{4}<1,\ -\frac{b}{4}\leq\frac{a}{4},\ \frac{b}{4}\geq -\frac{3}{4}a$

이므로 $(a,\ b)$의 순서쌍은

$(1,\ -1),\ (2,\ -2),\ (2,\ -1),\ (3,\ -3),\ (3,\ -2),\ (3,\ -1)$

의 6개

(ⅲ) $a<0,\ b\geq 0$일 때,

$-\frac{3}{4}a<1 \Rightarrow -\frac{4}{3}<a<0$

$\frac{b}{4}\leq -\frac{3}{4}a,\ -\frac{b}{4}\geq\frac{a}{4}$

이므로 $(a,\ b)$의 순서쌍은

$(-1,\ 0),\ (-1,\ 1)$의 2개

(ⅳ) $a<0,\ b<0$일 때,

$-\frac{3}{4}a<1 \Rightarrow -\frac{4}{3}<a<0$

$-\frac{b}{4}\leq -\frac{3}{4}a,\ \frac{b}{4}\geq\frac{a}{4}$

이므로 $(a,\ b)$의 순서쌍은

$(-1,\ -1)$의 1개

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $(a,\ b)$의 순서쌍의 개수는 19개

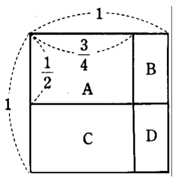
03. 절대부등식

55-1 ③

Ⅰ. 거짓<반례>

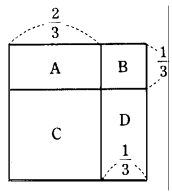
다음 그림과 같이 잡으면

$A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}>\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}>\frac{1}{4}$



Ⅱ. 거짓<반례>

$A=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}<\frac{1}{4}$, $D=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}<\frac{1}{4}$



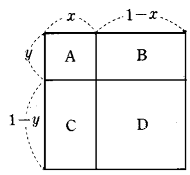
Ⅲ. 참

$A=xy>\frac{1}{4}$

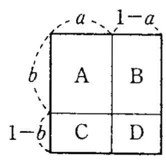
$D=(1-x)(1-y)\ =1-(x+y)+xy$

산술기하평균에서 $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ 이므로

$D\leq 1-2\sqrt{A}+A\ =(\sqrt{A}-1)^2<\frac{1}{4}\left(\because\ A>\frac{1}{4}\right)$



[별해]



그림에서 $A=ab,\ B=b(1-a),$

$C=a(1-b),\ D=(1-a)(1-b)$이다.

따라서, $AD=BC,\ A+B+C+D=1$인 관계가 성립한다.

$A+B+C+D=1=(A+D)+(B+C)$

$\geq 2\sqrt{AD}+2\sqrt{BC}=4\sqrt{AD}$

$\therefore\ \sqrt{AD}\leq\frac{1}{4}$에서 $AD\leq\frac{1}{16}$

따라서 $A>\frac{1}{4}$이면 $D<\frac{1}{4}$이 성립한다.

55-2 ⑤

$S_1+S_2+S_3+S_4=a$이고 산술기하평균에 의해

$S_1+S_2+S_3+S_4 \geq S_1+2\sqrt{S_2S_3}+S_4$

$a \geq S_1+2\sqrt{S_1S_4}+S_4$ $(\because\ S_1S_4=S_2S_3)$

$a \geq (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_4})^2$이고

$S_1 \geq 1$이고 $S_4 \geq 4$이므로 $S_1=1,\ S_4=2$일 때 최솟값을 가진다.

따라서 $a \geq (1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$

56-1 ②

△ACD와 △DCB가 닮음임을 이용하여 (가) 구하기

△ACD ∽ △DCB (AA닮음)이므로 $\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BC}$

$\therefore\ \boxed{\overline{CD}}^2=\overline{AC}\cdot\overline{BC}=ab \qquad \therefore\ \boxed{\overline{CD}}=\sqrt{ab}$

$\dfrac{\overline{AB}}{2}$는 원 O의 반지름의 길이이므로 $\overline{OE}=\dfrac{\overline{AB}}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

$\therefore$ (가) : $\overline{CD}$, (나) : $\overline{OE}$

56-2 정답 ②

(가) $\overline{GH}:\overline{HD}$

(나) $\overline{OH}\times\overline{HD}$

(다) $\overline{GH}\geq\overline{HD}$

($\because$ 원의 성질에 의해 $(\overline{GH})^2=\overline{BG}\times\overline{GC}=ab$이고

(나)에 의해 $(\overline{GH})^2=\overline{OH}\times\overline{HD}$ 이므로

$\overline{HD}=\dfrac{(\overline{GH})^2}{\overline{OH}}=\dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

$\overline{GH}\geq\overline{HD}$에서 $\sqrt{ab}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$이다.)

57-1 ④

그림과 같이 점 A와 점 B는 직선

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$의 x절편, y절편이므로 $\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b)$ 이다.

따라서 △OAB의 넓이 S는 $S=\dfrac{1}{2}ab$ …㉠

또, 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 가 $\mathrm{P}(2,\ 1)$을 지나므로 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ …㉡

$\dfrac{2}{a}>0,\ \dfrac{1}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{a}\times\dfrac{1}{b}}=2\sqrt{\dfrac{2}{ab}}$

$1\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{ab}}$ 의 양변을 제곱하면 $1\geq\dfrac{8}{ab}$

$\therefore\ ab\geq 8 \qquad \therefore\ S=\dfrac{1}{2}ab\geq 4$

따라서 △OAB 의 넓이 S의 최소값은 4이다.

57-2 ④

$y=(m-1)x+4m$이 x축과 만나는 점을 각각 점 A, B일 때,

$\mathrm{A}\left(\dfrac{-4m}{m-1},\ 0\right),\ \mathrm{B}(0,\ 4m)$이다.

삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{4m}{m-1}\times4m\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{8m^2}{m-1}$

$\dfrac{8m^2}{m-1}=\dfrac{8m(m-1)+8(m-1)+8}{m-1}$

$=8m+8+\dfrac{8}{m-1}=8(m-1)+\dfrac{8}{m-1}+16$

$\geq 2\sqrt{8(m-1)\times\dfrac{8}{m-1}}+16$

($m>1$일 때, 산술기하평균에 의해)

$=32$

따라서 삼각형 OAB 넓이의 최솟값은 32이다.

58-1 40

$\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$라 하면 $x^2+y^2=64$를 만족하는 x, y에 대하여

$3x+4y=k$라 하면 k의 최대값은 원에 접할 때이다.

원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $3x+4y-k=0$까지의 거리가 8

$\therefore\ \dfrac{|3\times0+4\times0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8$

$\dfrac{|-k|}{5}=8\ (k>0) \quad \therefore\ k=40$

58-2 $4\sqrt{13}$

$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ 이므로 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=16$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$에 의해

$(2^2+3^2)(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)\geq(2\overline{AP}+3\overline{BP})^2$

$(2\overline{AP}+3\overline{BP})^2\leq 208$

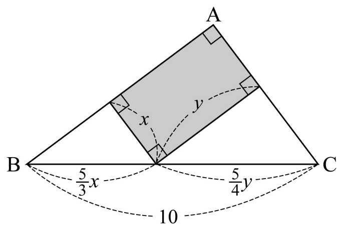
$-\sqrt{208}\leq 2\overline{AP}+3\overline{BP}\leq\sqrt{208}$

길이는 양수이므로 $0<2\overline{AP}+3\overline{BP}\leq 4\sqrt{13}$

$2\overline{AP}+3\overline{BP}$의 최댓값은 $4\sqrt{13}$이다.

(단, 등호는 $3\overline{AP}=2\overline{BP}$일 때 성립)

59-1 ⑤



ㄱ. 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 x, y라고 하면 $S_1=xy$ 이고, 닮음비에 의해 $\overline{BC}=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{5}{4}y=10 \quad \therefore$

$4x+3y=24$

산술 · 기하평균에서

$24=4x+3y \ge 2\sqrt{4x\times 3y}$ (단, 등호는 $4x=3y$ 일 때 성립)

$12 \ge \sqrt{12xy}$, $12xy \le 144$, $S_1=xy\le 12$

따라서 S_1 의 최댓값은 12 이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $4x=3y=12$, 즉 $x=3$, $y=4$ 일 때 S_1 이 최대이다.

따라서 S_1 이 최대일 때 직사각형의 둘레의 길이는 14 이다. (참)

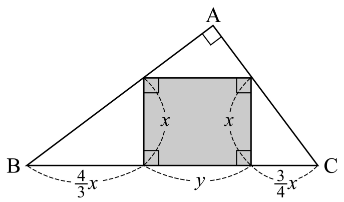
ㄷ. 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 x , y 라고 하면

$S_2=xy$ 이고, 닮음비에 의해 $\frac{4}{3}x+y+\frac{3}{4}x=10$ 에서

$16x+12y+9x=120$, $25x+12y=120$

$120=25x+12y\ge 2\sqrt{25x\times 12y}=10\sqrt{12xy}$ (단, 등호는 $25x=12y$ 일 때 성립)

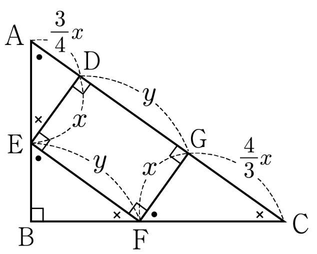
$\sqrt{12xy}\le 12$, $12xy\le 144$, $S_2=xy\le 12$



따라서 S_1 의 최댓값과 S_2 의 최댓값은 같다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

59-2 (1) $25x+12y=120$ (2) 12



(1) $\triangle ABC$의 세 변의 길이의 비가 $3:4:5$이고, $\triangle ADE$, $\triangle EBF$, $\triangle FGC$는 모두 닮음이다.

따라서 $\overline{AD}=\frac{3}{4}x$, $\overline{CG}=\frac{4}{3}x$이므로

$\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}x+y=10$, $\frac{25}{12}+y=10$

$\therefore 25x+12y=120$

(2) 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$25x+12y\ge 2\sqrt{25x\cdot 12y}=20\sqrt{3xy}$

$120\ge 20\sqrt{3xy}$, $6\ge\sqrt{3xy}$, $36\ge 3xy$

$\therefore xy\le 12$

60-1 ⑤

여러 가지 절대부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}$

$=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}$

$=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\ge 0$

(등호는 $a=b$일 때 성립) (참)

ㄴ. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{ab}-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ (참)

ㄷ. $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $b+c\ge 2\sqrt{bc}$, $c+a\ge 2\sqrt{ca}$

각 변끼리 더하면

$2(a+b+c)\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$\therefore a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

60-2 3개

ㄱ. $(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a+b}$ (참)

ㄴ. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}$

$=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}$

$=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\ge 0$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (참)

ㄷ. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{2(a+b)})^2$

$=2\sqrt{ab}-a-b$

$=-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\le 0$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}$ 이므로 ㄷ은 거짓

ㄹ. $a>0$, $b>0$, $c>0$에서

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2}\ge\sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2}\ge\sqrt{ca}$

양변을 더하면

$2(a+b+c)\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$\therefore a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ (참)

ㅁ. $\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-(\sqrt{a^2+1})^2=\frac{1}{4a^2}>0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ로 3개다.

61-1 ⑤

ㄱ. $\sqrt{a}\le\sqrt{a+b}\le\sqrt{a+b}+\sqrt{b}$ 이므로

$\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a+b}$ (단, 등호는 $b=0$일 때 성립한다.) (참)

ㄴ. $\sqrt{a+b}\ge 0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 0$ 이므로

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}\ge 0$

따라서 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}$ (단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때 성립한다.) (참)

ㄷ. $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0$, $\sqrt{2(a+b)} \geq 0$ 이므로

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$

$=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

$\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

61-2 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $-a^2+3a-4=-(a^2-3a+4)=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$

이므로 $-a^2+3a-4 \leq 0$가 항상 성립한다. (참)

ㄴ. $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0$

$a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0$이므로

$-a^2-b^2 \leq ab \leq a^2+b^2$는 항상 성립한다. (참)

ㄷ. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$

이므로 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$가 성립한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

62-1 ⑤

㉠에서 $a+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이고 등호는 $a=\frac{1}{b}$일 때, 즉 $ab=1$일 때 성립한다. ∴ (가) : $ab=1$

㉡에서 $b+\frac{4}{a} \geq 2\sqrt{\frac{4b}{a}}$ 이고 등호는 $b=\frac{4}{a}$일 때, 즉 $ab=4$일 때 성립한다. ∴ (나) : $ab=4$

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+a+\frac{4}{ab}=ab+\frac{4}{ab}+5$

$ab>0$, $\frac{4}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5 \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}+5=4+5=9$

(단, 등호는 $ab=\frac{4}{ab}$일 때 성립)

따라서 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은 $4+5=9$

62-2 (1) 풀이참조 (2) 최솟값 25, $3a=2b$

(1) ㉠의 등호가 성립할 때는 $a=b$

㉡의 등호가 성립할 때는 $\frac{4}{a}=\frac{9}{b}$이므로 $9a=4b$,

따라서 $a=b$와 $9a=4b$를 동시에 만족하는 양수 a, b는 존재하지 않으므로 최솟값은 24가 될 수 없다.

(2) $(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)=13+\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}$

$\geq 13+2\sqrt{\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}}$

$=13+2\sqrt{36}$

$=25$

이므로 최솟값은 25이다.

등호 성립조건은 $\frac{4b}{a}=\frac{9a}{b}$ 이므로 $9a^2=4b^2$

$a>0$, $b>0$이므로 a와 b의 관계식은 $3a=2b$이다.

63-1 ⑤

두 양의 실수 a, b가 $a+b=1$을 만족하므로

$1=a+b \geq 2\sqrt{ab}$

따라서 $\frac{1}{ab} \geq \boxed{4}$ …… ㉠

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\geq 1^2-2\times\frac{1}{4}$

그러므로 $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ …… ㉡

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)+4$

$=(a^2+b^2)\times\boxed{\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)}+4$

이므로 ㉠과 ㉡으로부터

$\therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \boxed{\frac{25}{2}}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

그러므로 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$의 최솟값은 $\frac{25}{2}$

63-2 (1) $\frac{1}{ab} \geq \frac{8}{9}$

(2) $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{289}{18}$

(1) 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$3=2a+b \geq 2\sqrt{2ab}$이고 $2a+b>0$, $\sqrt{2ab}>0$이므로

부등식의 양변을 제곱해도 부등식의 방향이 변하지 않는다.

따라서 $ab \leq \frac{9}{8}$임을 알 수 있고, $\frac{1}{ab} \geq \frac{8}{9}$

(2) 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+1^2)\left\{\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{2}{b}\right)^2\right\}$

$\geq \left\{1\cdot\left(2a+\frac{1}{a}\right)+1\cdot\left(b+\frac{2}{b}\right)\right\}^2$ …… ①

이 성립한다.

①의 우변에 있는 식을 정리하면

(준식)$=\left(2a+b+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)^2=\left(3+\frac{3}{ab}\right)^2$

$\geq \left(\dfrac{17}{3}\right)^2$

이므로 등호는

$2a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{2}{b}$ $\left(\text{단, } a=\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{3}{2}\right)$일 때,

문제에 (주어진 식)의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{17}{3}\right)^2$ 또는 $\dfrac{289}{18}$이 된다.

64-1 ②

양의 실수 a, b, c에 대하여

$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0$이므로

$4ab\leq(a+b)^2$이고, 같은 방법으로

$4bc\leq(b+c)^2,\ 4ca\leq(c+a)^2$이므로

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{4ab}{a+b}c+\frac{4bc}{b+c}a+\frac{4ca}{c+a}b$$
$$\leq\frac{(a+b)^2}{a+b}c+\frac{(b+c)^2}{b+c}a+\frac{(c+a)^2}{c+a}b$$
$$=2(ab+bc+ca)\cdots\cdots ㉠\text{이다.}$$

한편, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\geq 0$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡이다.

따라서 ㉠, ㉡으로부터

$4abc\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)\leq\dfrac{2}{3}(a+b+c)^2$ $\cdots\cdots$ ㉢이다.

이때, ㉢의 양변을 $4abc$로 나누면

$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{6abc}$이다.

$\therefore$ (가) $(a-b)^2$, (나) $2(ab+bc+ca)$, (다) 3

64-2 ④

$(|a|+|b|+|c|)^2-|a+b+c|^2$

$=2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)-\boxed{2(ab+bc+ca)}$

$=2\{(|ab|-ab)+(|bc|-bc)+(|ca|-ca)\}$

그런데 $|ab|\boxed{\geq}ab,\ |bc|\boxed{\geq}bc,\ |ca|\boxed{\geq}ca$이므로

$2\{(|ab|-ab)+(|bc|-bc)+(|ca|-ca)\}\geq 0$

따라서 $|a+b+c|^2\leq(|a|+|b|+|c|)^2$이므로

$|a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|$

여기서 등호는 $\boxed{ab\geq 0,\ bc\geq 0,\ ca\geq 0}$일 때 성립한다.

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은 ④이다.

65-1 ③

$b+c=x,\ c+a=y,\ a+b=z$라 하면,

$a+b+c=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$이므로

$a=\dfrac{1}{2}(y+z-x),\ b=\dfrac{1}{2}(z+x-y),\ c=\dfrac{1}{2}(x+y-z)$이다.

그러므로

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}$$
$$\geq 1\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}\right)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $\dfrac{1}{2}$ (나) $-\dfrac{3}{2}$ (다) 1

65-2 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $a>0,\ b>0,\ c>0$에서

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}+2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}\geq 6$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b},\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{c},\ \dfrac{c}{b}=\dfrac{b}{c}\ \text{즉, } a=b=c\text{일 때 성립}\right)$ (참)

ㄴ. $b+c=x,\ c+a=y,\ a+b=z$라 하면,

$2(a+b+c)=x+y+z$

$a=\dfrac{y+z-x}{2},\ b=\dfrac{x+z-y}{2},\ c=\dfrac{x+y-z}{2}$이므로

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{x}+\frac{x}{z}-3\right)$$

$\geq\dfrac{1}{2}\times(6-3)=\dfrac{3}{2}$ ($\because$ ㉠) (참)

ㄷ. [반례] $a=b=c$인 정삼각형이면,

$\left(\dfrac{a+b}{c}-1\right)\left(\dfrac{b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{c+a}{b}-1\right)=1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

66-1 21

모든 실수 x에 대해 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x+5}$의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여

$(k+1)x^2-(k+1)x+5\geq 0$

(i) $k=-1$ 일 때

$5\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립

(ii) $k\neq -1$ 일 때

$k+1>0$이고 $D\leq 0$ 이므로

$D=(k+1)^2-20(k+1)\leq 0$

$k^2-18k-19=(k-19)(k+1)\leq 0$

$-1<k\leq 19$이다.

따라서 $-1\leq k\leq 19$ 이므로 정수 k의 개수는 21

66-2 -4

$x^2-2xy+y^2-4ax+4y-b>0$에서

$x^2-2(y+2a)x+(y^2+4y-b)>0$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하여야 하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(y+2a)x+(y^2+4y-b)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(y+2a)^2-(y^2+4y-b)<0$$

$(-4a+4)y>4a^2+b$ …… ㉡

모든 실수 y에 대하여 부등식 ㉡이 성립하여야 하므로 $a=1$

$4\cdot 1^2+b<0,\ b<-4$

b가 정수이므로 $a+b$의 값이 최대가 될 때는 $b=-5$일 때이므로 $a+b=1+(-5)=-4$

67-1 16

$$\begin{aligned}(x+y)(y+2)&=xy+2x+y^2+2y\\&=y(x+y+2)+2x\\&=\frac{32}{x}+2x\geq 2\sqrt{\frac{32}{x}2x}=16\ (\because x>0)\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x=4$일 때 성립한다)

67-2 12, $ac=2$

$$\begin{aligned}(a+2b)(2b+3c)&=2ab+3ca+4b^2+6bc\\&=2b(a+2b+3c)+3ac\\&=2b\times\frac{6}{abc}+3ac\\&=\frac{12}{ac}+3ac\\&\geq 2\sqrt{\frac{12}{ac}\times 3ac}=12\end{aligned}$$

(단, 등호는 $\frac{12}{ac}=3ac$일 때 성립)

따라서 최솟값은 12이고, 등호는 $\frac{12}{ac}=3ac$일 때 성립하므로 $ac=2$일 때 성립한다. ($\because a>0,\ c>0$)

68-1 25

$$\left(8a+\frac{3}{b}\right)\left(\frac{1}{2a}+3b\right)=4+24ab+\frac{3}{2ab}+9=13+24ab+\frac{3}{2ab}$$

$ab>0$ 이므로

$$\frac{24ab+\frac{3}{2ab}}{2}\geq\sqrt{24ab\times\frac{3}{2ab}}=6$$

즉, $24ab+\frac{3}{2ab}\geq 12$ (단, 등호는 $ab=\frac{1}{4}$일 때 성립한다.)

$\therefore$ 최솟값은 25 이다.

68-2 ⑤

$$\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(2b+\frac{1}{a}\right)=8ab+\frac{1}{ab}+6$$

산술기하평균에 의하면

$$8ab+\frac{1}{ab}\geq 2\sqrt{8ab\cdot\frac{1}{ab}}$$

$$8ab+\frac{1}{ab}\geq 4\sqrt{2}$$

$$8ab+\frac{1}{ab}+6\geq 4\sqrt{2}+6$$

69-1 23

$x^2-9>0$이므로

$$\begin{aligned}x^2+\frac{49}{x^2-9}&=(x^2-9)+\frac{49}{x^2-9}+9\\&\geq 2\sqrt{(x^2-9)\times\frac{49}{x^2-9}}+9=23\end{aligned}$$

따라서 $x=4$일 때 최솟값은 23이다.

69-2 31

$x^2+\frac{4}{x^2-7}=x^2-7+\frac{4}{x^2-7}+7$이므로

산술기하평균에 의해

$x^2-7+\frac{4}{x^2-7}+7\geq 2\sqrt{4}+7=11$로 최솟값은 11

그 때의 x는 $x^2-7=\frac{4}{x^2-7}$을 만족하므로 $x^2-7=2$에서

$x=\pm3$ $x\geq 3$이므로

만족하는 $x=3$

그러므로 $a=3,\ b=11$에서 $3a+2b=31$

70-1 80

(A의 부피)$=3xy-1=47$ $\therefore xy=16$

(A의 겉넓이)$=2(xy+3x+3y)$

$=32+6(x+y)$

산술평균, 기하평균의 관계에 의하여

$32+6(x+y)\geq 32+12\sqrt{xy}=80$

(단, 등호는 $x=y=4$일 때 성립한다.)

따라서 A의 겉넓이의 최솟값은 80

70-2 20

높이가 1인 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 직육면체의 겉넓이는

$2xy+2x+2y=16$

$x+y=8-xy$ ……㉠

산술 기하 평균에 의해

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$

$8-xy\geq 2\sqrt{xy}$ ($\because$ ㉠)

$xy+2\sqrt{xy}-8\leq 0$

$(\sqrt{xy}+4)(\sqrt{xy}-2)\leq 0$

$-4\leq\sqrt{xy}\leq 2$

$x>0$, $y>0$이므로 $0<xy\le 4$
직육면체의 모든 모서리 길이의 합은
$4x+4y+4=4(8-xy)+4=36-4xy\ge 20$

71-1 ②

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{xy}$ …… ①

$x>0$, $y>0$이므로 절대부등식의 성질에 의하여

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ …… ②

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

그러므로 $(x+y)^2\ge 4xy$이고 정리하면

$\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$ …… ③

①, ②, ③에 의하여

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{xy}\ge\frac{12}{(x+y)^2}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$의 최솟값은 $\frac{4}{3}$

[다른 풀이]

$x>0$, $y>0$이므로 절대부등식의 성질에 의하여

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$
$$\ge\frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}}\right)=\frac{4}{3}$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 최솟값은 $\frac{4}{3}$

71-2 8

$8a^2+3b^2=2$이므로

$$\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{4}{3b^2}\right)(8a^2+3b^2)\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(4+\frac{3b^2}{2a^2}+\frac{32a^2}{3b^2}+4\right)\ge\frac{1}{2}(8+2\sqrt{16})=8$$

71-2 ①

이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\frac{1}{a}x$가 만나는 점 A는

$x^2-2ax=\frac{1}{a}x$ $\quad x-2a=\frac{1}{a}$ ($\because$ $x>0$)

$x=2a+\frac{1}{a}$, $y=2+\frac{1}{a^2}$ $\quad\therefore$ $A\left(2a+\frac{1}{a},\ 2+\frac{1}{a^2}\right)$

이차함수 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$의 그래프의 꼭짓점은 $B(a,\ -a^2)$

선분 AB의 중점은 $C\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a},\ 1+\frac{1}{2a^2}-\frac{a^2}{2}\right)$

선분 CH의 길이는
점 C의 x좌표와 같으므로 ($\because$ $a>0$)
선분 CH의 길이의 최솟값은

$$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}\ge 2\sqrt{\frac{3}{2}a\times\frac{1}{2a}}=\sqrt{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

72-2 $2+\sqrt{3}$

$f(x)=(x-2)^2-2a(x-2)$이므로 $f(1)=1+2a$이다.

$f(x)=(x-2)^2-2a(x-2)$와 $g(x)=\frac{1}{a}(x-2)$의 교점은

$A(2,\ 0)$, $B\left(2+2a+\frac{1}{a},\ 2+\frac{1}{a^2}\right)$이며

$f(x)$의 꼭짓점 $C(2+a,\ -a^2)$이므로

$D\left(\frac{4+3a+\frac{1}{a}}{2},\ \frac{2+\frac{1}{a^2}-a^2}{2}\right)$

따라서 산술기하평균에 의해

$$\overline{DH}=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}+2\ge 2+2\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{1}{2a}}=2+\sqrt{3}$$

(단, 등호는 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 성립)

73-1 ⑤

ㄱ. 삼각형 GDH와 삼각형 FCG는 직각이등변삼각형이므로 각 FGH는 직각이다. 또, 문제에서 점 M은 선분 FH의 중점이므로 세 점 F, G, H는 중심이 M이고 $\overline{FH}$를 지름으로 하는 한 원 위에 있다.
그러므로 $\overline{FM}=\overline{GM}$이다. (참)

ㄴ. 삼각형 AEH와 삼각형 BFE가 합동이므로
$\angle AEH+\angle BEF=90^\circ$이고, 삼각형 EFH는 직각이등변삼각형이다.

ㄷ. 선분 FH는 직각이등변삼각형 EFH의 빗변이므로 길이는 $\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}$
문제에서 $\overline{FH}=6\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$에서 $a^2+b^2=36$이다.
그런데 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이고
$36=a^2+b^2\ge 2ab$이므로 $\frac{1}{2}ab\le 9$
그러므로 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

73-2 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\overline{AH}=b$, $\overline{BF}=a$이므로 $\overline{EH}=\overline{EF}=\sqrt{a^2+b^2}$ (참)

ㄴ. $\triangle CFG=\frac{1}{2}b^2$, $\triangle DHG=\frac{1}{2}a^2$

$$\triangle EFH=\square ABFH-\triangle AEH-\triangle EBF$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)^2-\frac{1}{2}ab\times 2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

그러므로 $\triangle CFG+\triangle DHG=\triangle EFH$ (참)

ㄷ. $\triangle AEH=\frac{1}{2}ab=3$에서 $ab=6$

$\triangle EFH=\triangle EMH+\triangle EFM$이고

M이 $\overline{HF}$의 중점이므로 $\triangle EMH=\triangle EFM$에서

$\triangle EHM=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab=12$이므로

$\triangle EHM=\frac{1}{4}(a^2+b^2)\geq 3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

74-1 10

두 직선 l, m이 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$의 넓이를 4등분하므로

두 직선 l, m은 원의 중심 $(1, 3)$을 지나고 서로 수직인 직선이다.

직선 l의 기울기가 a $(0<a<3)$이므로

직선 m의 기울기는 $b=-\frac{1}{a}$

$l: y=a(x-1)+3$, $m: y=-\frac{1}{a}(x-1)+3$

직선 l의 x절편과 y절편은 각각 $1-\frac{3}{a}$, $3-a$이고,

직선 m의 x절편과 y절편은 각각 $1+3a$, $3+\frac{1}{a}$이므로 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}-1\right)(3-a)\quad(0<a<3)$

직선 m과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{1}{2}(1+3a)\left(3+\frac{1}{a}\right)$

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}-1\right)(3-a)+\frac{1}{2}(1+3a)\left(3+\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{a}+10a\right)\geq 10$

(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 10

74-2 54

$\triangle OAD=S_1$, $\triangle OBC=S_2$

$\overline{OB}=a$, $\overline{OD}=b$라 하면 $24:S_1=a:b$, $S_2:6=a:b$

$\therefore 24:S_1=S_2:6$

$S_1S_2=144$ $(S_1>0,\ S_2>0)$

$24+6+S_1+S_2\geq 24+6+2\sqrt{144}\geq 54$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은 54

75-1 9

a, b, c가 양수이므로

$(a+3b+4c)\left(\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{c}\right)=5+\frac{a+3b}{c}+\frac{4c}{a+3b}$

산술 기하 평균에 의하여

$\frac{a+3b}{c}+\frac{4c}{a+3b}\geq 2\sqrt{\frac{a+3b}{c}\cdot\frac{4c}{a+3b}}=4$

그러므로 최솟값은 9

75-2 $\frac{50}{3}$

$2x+y$를 α라 하고, $y+2z$를 β라 하면

$(x+y+z)\left(\frac{18}{x+2y+3z}+\frac{8}{2x+y}\right)$는

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{18\times 2}{\alpha+3\beta}+\frac{8}{\alpha}\right)$이다.

$(\alpha+\beta)\left(\frac{18}{\alpha+3\beta}+\frac{4}{\alpha}\right)$

와 같다.

이때 코시 슈바르츠 부등식의 성질에 의하여

$\frac{18}{\alpha+3\beta}\times\beta=\frac{4}{\alpha}\times\alpha$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$\frac{18}{\alpha+3\beta}\times\beta=4$

$9\beta=2(\alpha+3\beta)$

$3\beta=2\alpha$

$\beta=\frac{2}{3}\alpha$이므로

원래의 식에 대입하여 값을 구하면

$$\left(\alpha+\frac{2}{3}\alpha\right)\left(\frac{18}{\alpha+2\alpha}+\frac{4}{\alpha}\right)=\frac{5}{3}\alpha\times\frac{10}{\alpha}$$
$$=\frac{50}{3}$$

이므로 최솟값은 $\frac{50}{3}$이다.

76-1 ④

주어진 관계식을 변형하면

$a^2-6a+\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}=(a-3)^2-9+\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}$

따라서, $a=3$ 이고 $\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}$ 가 최소일 때 준 식은 최솟값을 갖는다.

산술 기하평균에 의하여

$\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{9b}{a}}=6$ (단, 등호는$a=3b$)

그러므로 준 식은 $a=3$, $b=1$일 때, 최솟값 -3 이 된다.

따라서, $m+n=3+1=4$

76-2 ④

$x^2-8x+\frac{9(x-1)^2+y^2}{(x-1)y}$

$= (x^2-8x+16)+\dfrac{9(x-1)}{y}+\dfrac{y}{x-1}-16$

$\geq (x-4)^2+2\sqrt{\dfrac{9(x-1)}{y}\cdot\dfrac{y}{x-1}}-16$

$= (x-4)^2-10$

(단, 등호는 $\dfrac{9(x-1)}{y}=\dfrac{y}{x-1}$일 때 성립)

즉, $y=3x-3$일 때 성립

$5 \leq x \leq 10$에서 $x=5$일 때, 최솟값 -9를 갖는다.

따라서 $x=5$, $y=12$일 때 주어진 식이 최솟값을 가지므로

$a=5$, $b=12$, $m=-9$

$a+b+m=8$

77-1 ④

코시-슈바르츠 부등식에 의하면

$(a^2+3^2)(b^2+2^2) \geq (ab+6)^2$

$144 \geq (ab+6)^2$ $(\because\ (a^2+9)(b^2+4)=144\ )$

$-12 \leq ab+6 \leq 12$

$-18 \leq ab \leq 6$

따라서, ab의 최댓값은 6

77-2 10

$a=3x$, $b=y$라고 가정한 후 코시-슈바르츠부등식에 의해

$(3^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (3a+b)^2$

$\dfrac{(9x+y)^2}{9x^2+y^2}=\dfrac{(3a+b)^2}{a^2+b^2} \leq \dfrac{(3^2+1^2)(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=10$

78-1 ②

$X=\sqrt{11-2x}+\sqrt{7-2y}$

라 놓으면

$X^2=18-2x-2y+2\sqrt{(11-2x)(7-2y)}$

$=8+2\sqrt{(11-2x)(7-2y)}$ $(\because\ x+y=5)$

따라서, X는 $\sqrt{(11-2x)(7-2y)}$ 이 최대일 때 최댓값을 갖는다. 산술 기하 평균에 의하면

$\dfrac{(11-2x)+(7-2y)}{2} \geq \sqrt{(11-2x)(7-2y)}$

$\therefore\ 4 \geq \sqrt{(11-2x)(7-2y)}$ $(\because\ x+y=5)$

(단, 등호는 $11-2x=7-2y$일 때 성립)

따라서, X의 최댓값은 4

78-2 $\sqrt{14}$

$x+y=10$에서 $y=10-x$ …… ㉠

x, y가 양수이므로 $x>0$, $y>0$에서 $x>0$, $10-x>0$

$\therefore\ 0<x<10$, $0<y<10$($\because$ ㉠)

$X=\sqrt{15-2x}+\sqrt{12-2y}$ 라 하면

$X^2=15-2x+2\sqrt{(15-2x)(12-2y)}+12-2y$

$=27-2(x+y)+2\sqrt{(15-2x)(12-2y)}$

$=7+2\sqrt{(15-2x)(12-2y)}$ $(\because\ x+y=10)$ …… ㉡

한편, $0<x<10$, $0<y<10$에서 $15-2x>0$, $12-2y>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의해서

$(15-2x)+(12-2y) \geq 2\sqrt{(15-2x)(12-2y)}$

(단, 등호는 $15-2x=12-2y$, 즉 $x=\dfrac{23}{4}$, $y=\dfrac{17}{4}$일 때 성립)

$\therefore\ 2\sqrt{(15-2x)(12-2y)} \leq 27-2(x+y)=7$ $(\because\ x+y=10)$

㉡에서 $X^2=7+2\sqrt{(15-2x)(12-2y)}=7+7=14$ 이므로

$0 \leq X \leq \sqrt{14}$, 따라서 X의 최댓값은 $\sqrt{14}$ 이다.

[다른 풀이]

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{15-2x})^2+(\sqrt{12-2y})^2\}$

$\geq (\sqrt{15-2x}+\sqrt{12-2y})^2$

(단, 등호는 $15-2x=12-2y$, 즉 $x=\dfrac{23}{4}$, $y=\dfrac{17}{4}$일 때 성립)

$2(15-2x+12-2y) \geq (\sqrt{15-2x}+\sqrt{12-2y})^2$

$2\{27-2(x+y)\} \geq (\sqrt{15-2x}+\sqrt{12-2y})^2$

$14 \geq (\sqrt{15-2x}+\sqrt{12-2y})^2$ $(\because\ x+y=10)$

$\therefore\ 0 \leq \sqrt{15-2x}+\sqrt{12-2y} \leq \sqrt{14}$

$(\because\ \sqrt{15-2x} \geq 0,\ \sqrt{12-2y} \geq 0)$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $\sqrt{14}$이다.

79-1 ④

$ab=k$라 하면 $b=\dfrac{k}{a}$이므로 $ab+a+2b=7$에서

$k+a+\dfrac{2k}{a}=7$,

즉 $a^2+(k-7)a+2k=0$ 을 만족하는 양수 a가 존재하도록 하는 k의 범위를 구한다.

a에 대한 이차함수 $y=a^2+(k-7)a+2k$ 의 y절편은 양수 $2k$이므로

대칭축에서 $-\dfrac{k-7}{2}>0$, 즉 $k<7$이고 …… ㉠

판별식에서 $D=(k-7)^2-8k \geq 0$, $k^2-22k+49 \geq 0$,

$k \geq 11+6\sqrt{2}$, $k \leq 11-6\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 11-6\sqrt{2}$이므로

구하려는 최댓값은 $11-6\sqrt{2}$이다.

79-2 5

$2ab+4a+b=14$을 정리하면 $(2a+1)(b+2)=16$이다.

$2a+b=(2a+1)+(b+2)-3$

산술기하평균을 이용하면

$\dfrac{(2a+1)+(b+2)}{2} \geq \sqrt{(2a+1)(b+2)}=4$이므로

$(2a+1)+(b+2) \geq 8$

$\therefore\ 2a+b=(2a+1)+(b+2)-3 \geq 8-3=5$

80-1 ④

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, 즉 $9x^2+4y^2=36\geq 12xy$ (등호는 $3x=2y$일 때)

$\therefore\ (3x+2y)^2=9x^2+4y^2+12xy\leq 36+36=72$

[다른풀이]

코시슈바르츠부등식을 사용하면,

$(3x+2y)^2=\left(6\cdot\frac{x}{2}+6\cdot\frac{y}{3}\right)^2\leq(36+36)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=72$

80-2 8

코시 슈바르츠 부등식에서

$(27x^2+y^2)\left(\frac{1}{3}+1\right)\geq(3x+y)^2$(등호는 $y=9x$일 때)

$36\geq(3x+y)^2$이고 x, y가 양수이므로

$0<3x+y\leq 6$이다. $(3x+y)\left(\frac{1}{3}+1\right)\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$(등호는 $y=9x$일 때)

이고 $6\geq 3x+y$이므로

$6\times\frac{4}{3}\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$8\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

따라서 최댓값은 8이다.

04. 함수

81-1 ⑤

$f(x)=[x[x]]$이므로

ㄱ. $x\geq 0$일 때, $[x]\geq 0$이므로 $x[x]\geq 0$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]\geq 0$

$x<0$일 때, $[x]<0$이므로 $x[x]>0$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]\geq 0$ (참)

ㄴ. $n\leq x<n+1$일 때, $[x]=n$

또 $n^2\leq x[x]<n^2+n$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]=n^2$ 또는 n^2+1 또는 $\cdots$ 또는 n^2+n-1

즉, $n(\{f(x)\,|\,n\leq x<n+1\})=n$ (참)

ㄷ. $-n\leq x<-n+1$(n은 자연수일 때) $[x]=-n$

또 $n^2\geq x[x]>n^2-n$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]=n^2-n,\ n^2-n+1,\ \cdots,\ n^2-1,\ n^2$

즉, $n(\{f(x)\,|\,-n\leq x<-n+1\})=n+1$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

81-2 199

$n\leq x<n+1$이고 n은 음이 아닌 정수, $x=n+\alpha$,

$0\leq\alpha<1$일 때 $n^3\leq f(x)<(n+1)^3$

$5^3=125<170<6^3=216$이므로 $5<x<6$ $\therefore\ [x]=5$

$[x\cdot[x]]=m$ 이라 하면 $f(x)=x\cdot m=170$에서 $x=\frac{170}{m}$

$5<\frac{170}{m}<6$ 이므로 $\frac{170}{6}<m<\frac{170}{5}$, $28.33\cdots<m<34$ ……㉠

$5<x<6$에서 $[x]=5$이므로 $25<x\cdot[x]<30$

$25\leq[x\cdot[x]]\leq 29$이므로 $25\leq m\leq 29$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $m=29$, $x=\frac{170}{29}=\frac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=29+170=199$

82-1 ②

ㄱ. $f(x)$와 $g(x)$가 임의의 점에서 만나면

$f(a)=g(a)=k$이므로

$h(a)=\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}g(a)=k$ (참)

ㄴ. $f(x)$와 $g(x)$가 y축에 대하여 대칭이면

$f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$이므로

$h(-x)=\frac{1}{3}f(-x)+\frac{2}{3}g(-x)$

$=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)=h(x)$ (참)

ㄷ. $f(x)=3x^3$, $g(x)=-\frac{3}{2}x$라면 $f(x)$와 $g(x)$가 일대일

대응이지만 $h(x)=x^3-x$는 일대일 대응이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

82-2 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 만난다고 하면 두 함수는 $f(a)=g(a)$를 만족한다. 또한

$h(a)=\frac{2}{3}f(a)+\frac{1}{3}g(a)$이고 $h(a)=f(a)=g(a)$이므로

$y=h(x)$또한 $f(x)$, $g(x)$의 교점을 지나게 된다. (참)

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 원점대칭이므로

$f(x)=-f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$가 성립한다.

$$\begin{aligned}-h(-x)&=-\frac{2}{3}f(-x)-\frac{1}{3}g(-x)\\&=\frac{2}{3}f(x)+\frac{1}{3}g(x)\\&=h(x)\end{aligned}$$

따라서 $-h(-x)=h(x)$이므로 함수 $h(x)$ 또한 원점대칭 함수이다. (참)

ㄷ. $f(x)$, $g(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=g(x)=x$이므로

$h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x=x$이고 따라서 $h(x)$는 항등함수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

83-1 ②

$f(x)=[x^2]$과 $g(x)=[x]^2$에서

ㄱ. $f(\sqrt{2})=\left[(\sqrt{2})^2\right]=[2]=2$

$g(\sqrt{2})=[\sqrt{2}]^2=1$이므로 $f(\sqrt{2})>g(\sqrt{2})$ (참)

ㄴ. x가 정수이면 x^2도 정수이고

$[x]=x$, $[x]^2=x^2$이므로

$[x^2]=x^2=[x]^2$

$\therefore\ f(x)=g(x)$ (참)

ㄷ. (반례)

$x=\frac{1}{2}$이면 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{1}{4}\right]=0$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{1}{2}\right]^2=0$

즉, $f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 x가 정수가 아닌 경우에도 성립한다. (거짓)

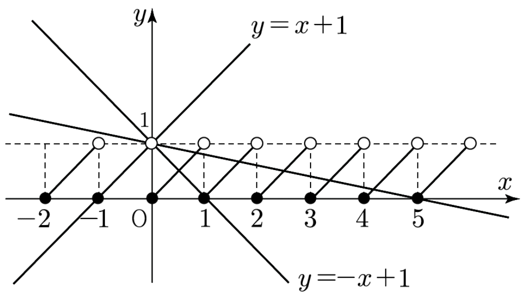
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

83-2 ㄱ

$g(x)=x-[x]$로 놓으면 $n\le x<n+1$ (n은 정수)일 때 $[x]=n$이다.

$\therefore\ g(x)=x-n$ ($n\le x<n+1$, n은 정수)

따라서 $g(x)=x-[x]$의 그래프는 다음과 같다.



이때 방정식 $x-[x]=mx+1$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=g(x)$의 그래프와 $y=mx+1$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수이다.

ㄱ. $m=-1$일 때

$y=-x+1$과 $y=g(x)$의 교점은 $x=\frac{1}{2}$, $x=1$일 때 2(개)이다.

$\therefore\ f(-1)=2$ (참)

ㄴ. $m=1$일 때

$y=x+1$과 $y=g(x)$의 교점은 무수히 많다.

$\therefore\ f(1)\ne 1$ (거짓)

ㄷ. $-\frac{1}{4}\le m<-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}<m\le\frac{1}{6}$일 때

$y=mx+1$와 $y=g(x)$의 교점은 5(개)이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

84-1 ③

ㄱ. $f(12)=f(10\times1+2)=f(1)+2$
$=f(10\times0+1)+2=f(0)+1+2$
$=1+2=3$ (참)

ㄴ. $f(8\times123)=f(984)=21$,
$8f(123)=8(1+2+3)=48$ (거짓)

ㄷ. $f(100a+10b+c)=f(10a+b)+c=a+b+c$
$f(100c+10b+a)=f(10c+b)+a=c+b+a$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

84-2 ㄱ

$f(x)$는 x의 각 자리 숫자의 합과 같다.

ㄱ. $f(10)=1$ (참)

ㄴ. $f(9876)=30$이므로 $f(f(9876))=f(30)=3$ (거짓)

ㄷ. (반례) $n=23$일 때, $f(n)=5$이지만 n은 5의 배수가 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

85-1 25

함수 $f(x)$가 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족하므로

$f(-2)=-f(2)$, $f(-1)=-f(1)$, $f(0)=0$이다.

$f(-2)$와 $f(-1)$이 될 수 있는 값은 각각 5가지이므로 함수 f의 개수는 $5\times5=25$이다.

85-2 120

(나) 조건에서

$a=1$인 경우

$f(-1)+f(1)=1$이므로 $(f(-1),\ f(1))$로 가능한 순서쌍은 $(-2,\ 3),\ (-1,\ 2),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ -1),(3,\ -2)$의 여섯 가지이다.

$a=2,\ 3$인 경우

$(f(-2),\ f(2)),\ (f(-3),\ f(3))$도 마찬가지다.

$(f(-1),\ f(1))=(-2,\ 3)$일 때,

$(f(-2),\ f(2))=(-1,\ 2),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ -1)$이면 (가) 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $(f(-1),\ f(1))=(-2,\ 3)$이면 $(f(-2),\ f(2))$, $(f(-3),\ f(3))$는 $(-2,\ 3)$ 또는 $(3,\ -2)$이어야 한다.

$(f(-1),\ f(1))=(3,\ -2)$일 때도 마찬가지다.

이때, 치역의 원소의 개수는 3이므로 $f(0)$은 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에서 -2와 3을 제외한 5개의 원소 중 하나여야 한다.

따라서

$(f(-1),\ f(1))$의 순서쌍을 고르는 경우는 6가지,

그 각각에 대하여

$(f(-2),\ f(2))$의 순서쌍을 고르는 경우는 2가지,

그 각각에 대하여

$(f(-3),\ f(3))$의 순서쌍을 고르는 경우는 2가지,

그 각각에 대하여

$f(0)$의 값을 고르는 경우 5가지

이므로, $6\times2\times2\times5=120$

86-1 ③

$$f(1)=f\left(2\times\frac{1}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=64,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=8$$

$$f(1)=f\left(3\times\frac{1}{3}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^3=64,\ f\left(\frac{1}{3}\right)=4$$

$$f(1)=f\left(6\times\frac{1}{6}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^6=64,\ f\left(\frac{1}{6}\right)=2$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)=14$$

86-2 1

등식 $f(2x+y)=3f(x)+f(y)+xy+6$의 양변에 y 대신 $-x$를 대입하면

$f(x)=3f(x)+f(-x)-x^2+6$

$2f(x)+f(-x)=x^2-6$ …… ㉠

이 식의 양변에 x대신 $-x$를 대입하면

$2f(-x)+f(x)=x^2-6$ …… ㉡

㉠의 양변에 2을 곱한 식에서 ㉡의 양변을 각각 빼면

$3f(x)=x^2-6$이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^2-2$

$\therefore\ f(3)=1$

87-1 ③

이차방정식 $x^2-2xf(t)+f(t)=0$의 판별식 D에 대하여

$D/4=f(t)\{f(t)-1\}$이므로

ㄱ. $f(t)$의 값이 최대일 때 $D/4=2(2-1)>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 중근을 갖게 하려면 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=1$이므로 $f(t)=0$인 t의 개수는 4, $f(t)=1$인 t의 개수는 3이다. 따라서 서로 다른 실수 t는 7개이다. (참)

ㄷ. $|t|>2$일 때, $f(t)<0$이므로 $D/4>0$이다. 따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

87-2 ㄴ, ㄷ

이차방정식 $x^2-2xf(t)+2f(t)=0$의 판별식 D에 대하여

$D/4=f(t)\{f(t)-2\}$이므로

ㄱ. $f(t)$의 값이 최대일 때 $D/4=2(2-2)=0$이므로 중근을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 중근을 갖게 하려면 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=2$이므로 $f(t)=0$인 t의 개수는 4, $f(t)=2$인 t의 개수는 1이다.따라서 서로 다른 실수 t는 5개이다. (참)

ㄷ. $|t|>2$일 때, $f(t)<0$이므로 $D/4>0$이다. 따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

88-1 5

함수 $y=g(x)$의 그래프에 의해 $g(4)=3,\ f(4)=2$이므로

$h(4)=3$

$f(3)\leq g(3)$인 경우 $h(3)=g(3)=3$이므로

함수 $h(x)$가 일대일대응이라는 조건에 모순

$\therefore\ f(3)>g(3)$

$\therefore\ f(3)=4,\ h(3)=4$

$h(1)=1$인 경우 $g(1)=2$이므로 모순

$\therefore\ h(1)=2,\ h(2)=1$

$h(2)=1,\ g(2)=1$이므로 $f(2)=1$

따라서 $f(2)+h(3)=1+4=5$

88-2 5

$x=2$일 때, $f(2)=2,\ g(2)=1$이므로 $h(2)=2$이다.

$h(x)$의 함숫값을 살펴보면,

$h(1)=g(1)$

($\because f(1)=1,\ g(1)\neq1$이므로 항상 $g(1)>f(1)$이 된다.)

$h(2)=f(2)=2$

($\because\ f(2)\geq g(2)$)

$h(3)=g(3)=4$

$h(x)$의 치역이 2개이기 위해서는 $g(1)=2$이어야 하고 이때의 치역은 $\{2,\ 4\}$가 된다.

($\because\ f(3)=3$이 $h(3)$의 함숫값이면 치역의 원소가 2개인 것에 어긋난다.)

$h(4)=f(4)=4$

$\therefore\ g(4)+h(1)=3+2=5$

89-1 172

조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} f(2015) &= f\left(3\times\frac{2015}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{2015}{3}\right)=3^2f\left(\frac{2015}{3^2}\right) \\ &= \cdots\ = 3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)\text{이다.}\end{aligned}$$

$\dfrac{2015}{3^6}$의 범위는 $2<\dfrac{2015}{3^6}<3$이므로 조건 (가)에 의하여 $f\left(\dfrac{2015}{3^6}\right)=3-\dfrac{2015}{3^6}$ 이다.

$$\therefore\ 3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)=3^6\left(3-\frac{2015}{3^6}\right)=3^7-2015=172$$

89-2 551

조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} f(2023) &= f\left(5\times\frac{2023}{5}\right)=5f\left(\frac{2023}{5}\right)=5^2f\left(\frac{2023}{5^2}\right) \\ &= \cdots\ = 5^4f\left(\frac{2023}{5^4}\right)\text{이다.}\end{aligned}$$

$\dfrac{2023}{5^4}$의 범위는 $3<\dfrac{2023}{5^4}<4$이므로 조건 (가)에 의하여 $f\left(\dfrac{2023}{5^4}\right)=5-\dfrac{2023}{5^4}$ 이다.

$$\therefore\ 5^4f\left(\frac{2023}{5^4}\right)=5^4\left(5-\frac{2023}{5^4}\right)=5^5-2023=1102$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}f(2023)=\frac{1}{2}\times1102=551$$

90-1 7

함수 $f(x)=a|x+2|-4x$는

(i) $x<-2$일 때, $f(x)=a(-x-2)-4x=-(a+4)x-2a$

(ii) $x\ge-2$일 때, $f(x)=a(x+2)-4x=(a-4)x+2a$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-(a+4)x-2a & (x<-2)\\ (a-4)x+2a & (x\ge-2)\end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이므로 두 직선 $y=-(a+4)x-2a$와 $y=(a-4)x+2a$의 기울기의 부호가 서로 같다.

$-(a+4)(a-4)>0\quad (a+4)(a-4)<0\quad \therefore\ -4<a<4$

$-4<a<4$를 만족시키는 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

따라서 정수 a의 개수는 7

90-2 2

$3x-k\ge0$인 경우 $f(x)=(2a+3)x-k$

$3x-k<0$인 경우 $f(x)=(2a-3)x+k$

일대일대응이려면 두 경우의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$(2a+3)\times(2a-3)>0$

따라서 $a<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $a>\dfrac{3}{2}$

따라서 최소의 자연수 $a=2$

91-1 ④

함수 f가 X에서 X로의 일대일 대응이므로

$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

조건 (가)의 $f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=f(5)$에서

$f(5)>0$이므로

$f(2)>f(3),\ f(4)>f(1)$이고

조건 (나)에서 $f(1)<f(2)<f(4)$이므로

$f(3)<f(1)<f(2)<f(4)$이다.

따라서 $f(2)-f(3)\ge2$이고,

$f(2)<f(4)$이므로 $f(2)\le4$이다.

따라서 $f(2)-f(3)\le3$

그러므로 $f(5)=2$ 또는 $f(5)=3$

(i) $f(5)=2$인 경우

$f(3),\ f(1),\ f(2),\ f(4)$가 이 순서대로 증가하는 4개의 자연수이므로

$f(3)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=4,\ f(4)=5$이다.

그런데 $f(5)=2,\ f(2)-f(3)=4-1=3$

이므로 모순이다.

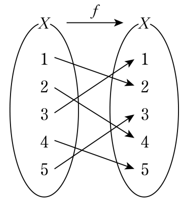
(ii) $f(5)=3$인 경우

$f(5)=f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=3$이고

3이 1, 2, 3, 4, 5의 중앙값이므로

$f(3)<f(1)<f(5)<f(2)<f(4)$

즉, $f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=1,\ f(4)=5,\ f(5)=3$



따라서 $f(2)+f(5)=4+3=7$

91-2 12

$f(1)+f(3)=f(2)+f(5)$를 만족하는 경우는

$2+8=4+6,\ 2+10=4+8,\ 4+10=6+8$의

세 가지 경우이다.

(i) $2+8=4+6$인 경우 $f(4)=10$이다.

그러나 $f(1)>f(2)>f(3)>f(4)$에 모순이므로 조건을 만족하지 못한다.

(ii) $2+10=4+8$인 경우 $f(4)=6$이다.

역시 $f(1)>f(2)>f(3)>f(4)$에 모순이므로 조건을 만족하지 못한다.

(iii) $4+10=6+8$인 경우 $f(4)=2$이다.

$f(1)=8,\ f(3)=6$인 경우는

$f(2)$의 값이 조건 $f(1)>f(2)>f(3)>f(4)$를 만족하지 못한다.

$f(1)=10$, $f(3)=4$이면
$f(2)=6$, $f(5)=8$ 또는 $f(2)=8$, $f(5)=6$이다.
따라서 $f(3)+f(5)$의 최댓값은 $f(3)+f(5)=4+8=12$이다.

92-1 12

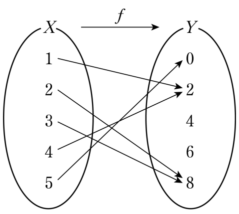
3 이상 5 이하의 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로
$f(3)\times f(5)$, $f(4)\times f(6)$, $f(5)\times f(7)$은 모두 짝수이다.
$f(4)$ 또는 $f(6)$은 적어도 하나가 짝수이고, 집합 X의 원소 중 짝수인 것은 4, 6뿐이므로 $f(3)\times f(5)$와 $f(5)\times f(7)$이 모두 짝수이려면 $f(5)$는 짝수가 되어야 한다.
따라서 $f(3)$, $f(7)$은 모두 홀수이므로 $f(3)+f(7)$의 최댓값은
$f(3)=5$, $f(7)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(7)=5$일 때
$5+7=12$이다.

92-2 12

1 이상 4 이하의 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+3)$의 값이 짝수이므로 $f(1)\times f(4)$, $f(2)\times f(5)$, $f(3)\times f(6)$, $f(4)\times f(7)$은 모두 짝수이다.
$f(2)$, $f(5)$ 중 적어도 하나는 짝수이고 또는 $f(3)$, $f(6)$ 중 적어도 하나는 짝수이다. 집합 X의 원소 중 짝수인 것은 2, 4, 6 뿐이므로 $f(1)\times f(4)$와 $f(4)\times f(7)$이 모두 짝수이려면 $f(4)$는 짝수가 되어야 한다.
따라서 $f(1)$, $f(7)$은 모두 홀수이므로 $f(1)+f(7)$의 최댓값은
$f(1)=5$, $f(7)=7$ 또는 $f(1)=7$, $f(7)=5$일 때
$5+7=12$이다.

93-1 ③

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서
집합 $Y=\{0, 2, 4, 6, 8\}$로의 함수 f가 $f(x)=(2x^2$의 일의 자리의 숫자)이므로
$f(1)=2$, $f(2)=8$, $f(3)=8$, $f(4)=2$, $f(5)=0$이며,
함수의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



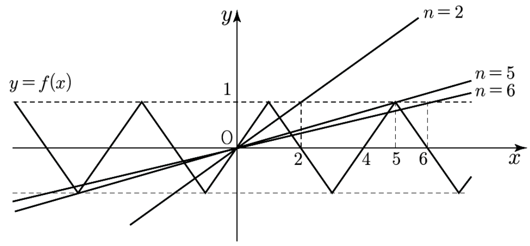
함숫값이 2인 정의역 X의 원소는 1과 4이므로
$f(a)=2$인 X의 원소 a는 $a=1$ 또는 $a=4$
함숫값이 8인 정의역 X의 원소는 2와 3이므로
$f(b)=8$인 X의 원소 b는 $b=2$ 또는 $b=3$
a, b의 순서쌍 (a, b)로 가능한 것은
$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$이므로
$a+b$의 값은 3, 4, 6, 7
따라서 $a+b$의 최댓값은 7

93-2 3

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 집합 $Y=\{y\,|\,y$는 9 이하의 자연수$\}$로의
함수 f가 $f(x)=(3x^2+2x+1$의 일의 자리의 숫자)이므로
$f(1)=6$, $f(2)=7$, $f(3)=4$, $f(4)=7$, $f(5)=6$, $f(6)=1$이며
함숫값이 6인 정의역 X의 원소는 1과 5이므로
$f(a)=6$인 X의 원소 a는 $a=1$ 또는 $a=5$
함숫값이 7인 정의역 X의 원소는 2와 4이므로
$f(b)=7$인 X의 원소 b는 $b=2$ 또는 $b=4$
a, b의 순서쌍 (a, b)로 가능한 것은
$(1, 2)$, $(1, 4)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$이므로
$a+b$의 값은 3, 5, 7, 9
따라서 $a+b$의 최솟값은 3

94-1 33

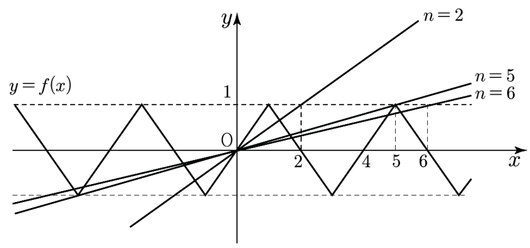
주어진 조건에 맞는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=\dfrac{1}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수는
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{n}x$가 만나는 점의 개수이다.
(i) $n=1$일 때, 무수히 많은 점에서 만난다.
(ii) $2\le n\le 4$일 때, 만나는 점의 개수는 3
(iii) $n=5$일 때, 만나는 점의 개수는 5
(iv) $6\le n\le 8$일 때, 만나는 점의 개수는 7
(v) $n=9$일 때, 만나는 점의 개수는 9
(vi) $10\le n\le 12$일 때, 만나는 점의 개수는 11
따라서 만나는 점의 개수가 11이 되도록 하는
자연수 n은 10, 11, 12이다.
모든 자연수 n의 값의 합은 $10+11+12=33$이다.

94-2 21

주어진 조건에 맞는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=\dfrac{1}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수는

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{n}x$가 만나는 점의 개수이다.
(ⅰ) $n=1$일 때, 무수히 많은 점에서 만난다.
(ⅱ) $2\le n\le 4$일 때, 만나는 점의 개수는 3
(ⅲ) $n=5$일 때, 만나는 점의 개수는 5
(ⅳ) $6\le n\le 8$일 때, 만나는 점의 개수는 7
(ⅴ) $n=9$일 때, 만나는 점의 개수는 9
(ⅵ) $10\le n\le 12$일 때, 만나는 점의 개수는 11
따라서 만나는 점의 개수가 7이 되도록 하는 자연수 n은 $6, 7, 8$이다.
모든 자연수 n의 값의 합은 $6+7+8=21$이다.

95-1 ⑤

ㄱ. $10+m-1=9+m$이 소수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 m은 2이므로 $f(10)=2$이다. (참)
ㄴ. $f(n)=5$이면 $n+5-1=n+4$는 소수이므로 $n+4+m-1=n+3+m$이 소수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 m은 1이다. 따라서 $f(n+4)=1$이다. (참)
ㄷ. $f(n)=1$이므로 $f(n)$의 정의에 의해 n은 소수이다.
$(n-3)+m-1=n-4+m$은 $m=4$이면 소수이므로 $f(n-3)\le 4$이다. 4보다 작은 자연수는 $f(n-3)$이 될 수 없음을 귀류법을 이용하여 보이자.
(ⅰ) $m=1$이면 $n-3$은 소수이다. n은 5 이상의 소수이므로 홀수이고, $n-3$은 짝수이다. 이를 만족하는 경우는 $n=5$이고 $f(4)=2>1=f(3)$이 되어 주어진 조건에 모순이다.
(ⅱ) $m=2$이면 $f(n-2)=1$이므로 $f(n-1)<f(n-2)=1$이 되어 모순이다.
(ⅲ) $m=3$이면 $f(n-1)=1$이므로 $n-1$과 n이 모두 소수가 되어야 한다. 연속한 두 소수는 2, 3뿐이므로 주어진 조건에 모순이다.
그러므로 $(n-3)+m-1$을 소수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 m은 4이므로 $f(n-3)=4$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

95-2 10

$f(a)$, $f(b)$는 모두 0, 1, 2, 3, 4 중 하나이다.
$f(a)f(b)=f(a)+f(b)+2$에서
$(f(a)-1)(f(b)-1)=3$이므로
$f(a)-1=1$, $f(b)-1=3$ 또는
$f(a)-1=3$, $f(b)-1=1$ 이 가능하다.
따라서 $f(a)=2$, $f(b)=4$ 또는 $f(a)=4$, $f(b)=2$
따라서 $a=2, 7, 12$이면 $b=4, 9, 14$이고
$a=4, 9, 14$이면 $b=2, 7, 12$이다.
따라서 $a+b$로 가능한 값은 6, 11, 16, 21, 26
$g(6)$은 $6+m-1$이 소수가 되도록 하는 자연수 m의 최솟값이므로 $g(6)=2$
$g(11)$은 $11+m-1$이 소수가 되도록 하는 자연수 m의 최솟값이므로 $g(11)=1$
$g(16)$은 $16+m-1$이 소수가 되도록 하는 자연수 m의 최솟값이므로 $g(16)=2$
$g(21)$은 $21+m-1$이 소수가 되도록 하는 자연수 m의 최솟값이므로 $g(21)=3$
$g(26)$은 $26+m-1$이 소수가 되도록 하는 자연수 m의 최솟값이므로 $g(26)=4$
따라서 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 집합 X의 모든 원소의 합은 $1+2+3+4=10$

96-1 7

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여
$f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 X의 원소 n은 한 개 있다.
이때 집합 X의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하자.
$1+2+3+4+5+6+7+8=36$이므로 조건 (나)에서
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$
$=36+n-m=42$
$\therefore\ n-m=6$
집합 X의 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음 두 가지이다.
(ⅰ) $n=8$, $m=2$일 때
함수 f의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로
조건 (다)를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $n=7$, $m=1$일 때
함수 f의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로
조건 (다)를 만족시킨다.
따라서 $n=7$

96-2 4

조건 (가)와 조건 (다)에서 최댓값과 최솟값의 차가 5이므로 치역의 원소의 개수가 6이면서 가능한 최댓값과 최솟값의 경우의 수는
$3\le y\le 8$, $2\le y\le 7$, $1\le y\le 6$의 3가지이다.
(ⅰ) $3\le y\le 8$ 인 경우 :
조건 (나)에서 모든 치역의 합이 38이고, 주어진 6개 치역의 합은 $3+4+5+6+7+8=33$이므로 이 둘의 차이만큼 나머지 함숫값이 결정되어야 한다. $(38-33=5)$
결정되지 않은 두 개의 치역의 합이 5가 나와야 하지만 주어진 치역의 범위에서 두 수의 합이 5인 경우는 발생하지 않으므로 조건을 만족하지 못하게 된다.
(ⅱ) $1\le y\le 6$ 인 경우 :
조건 (나)에서 모든 치역의 합이 38이고, 주어진 6개 치역의 합은 $1+2+3+4+5+6=21$이므로 이 둘의 차이만큼 나머지 함숫값이 결정되어야 한다.
$(38-21=17)$
결정되지 않은 두 개의 치역의 합이 17이 나와야 하지만 주어진 치역의 범위에서 두 수의 합이 17인 경우는 발생하지 않으므로 조건을 만족하지 못하게 된다.
(ⅲ) $2\le y\le 7$ 인 경우 :
조건 (나)에서 모든 치역의 합이 38이고, 주어진 6개 치역의 합은 $2+3+4+5+6+7=27$이므로 이 둘의

차이만큼 나머지 함숫값이 결정되어야 한다.
$(38-27=11)$
결정되지 않은 두 개의 치역의 합이 11이 나와야 하고 이를 만족하는 치역은 7과 4, 6과 5가 가능하게 된다. 그러므로 주어진 치역의 경우의 수 중 자연수 n의 최솟값은 4이다.

97-1 ④

1은 집합 X의 원소 중 가장 작은 수이므로 $f(2)\geq 1$
$f(2)\geq 1$이면 $f(2)\geq f(1)$
한편, $f(1)=3$이므로 $f(1)\geq 2$에서 $f(1)\geq f(2)$
그러므로 $f(2)=f(1)=3$
마찬가지로 $f(3)\geq 1$이므로 $f(3)\geq f(1)$
한편, $f(1)=3$이므로 $f(1)\geq 3$에서 $f(1)\geq f(3)$
그러므로 $f(3)=f(1)=3$
$f(4)\geq 1$이므로 $f(4)\geq f(1)=3$
따라서 $f(2)+f(4)$의 최솟값은 6

97-2 ④

$f(1)\geq 1$이므로 $f(1)$: 5가지
$f(2)\geq 2$이므로 $f(2)$: 4가지
$f(3)\geq 3$이므로 $f(3)$: 3가지
$f(4)\geq 4$이므로 $f(4)$: 2가지
$f(5)\geq 5$이므로 $f(5)$: 1가지
이므로 $5\times4\times3\times2\times1=120$

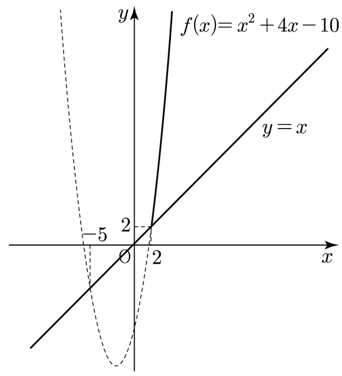
98-1 17

$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$에서 이 함수가 일대일대응이 되기 위해서는 $a\geq 2$이어야 한다.
$a\geq 2$일 때, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq f(a)\}$이고 치역이 집합 $Y=\{y\,|\,y\geq b\}$와 같아야 하므로 $b=f(a)$이다.

$$a-b=a-f(a)$$
$$=-a^2+5a-3$$
$$=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$

$a\geq 2$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$이다.
따라서 $p=4$, $q=13$이므로 $p+q=17$

98-2 2



$f(x)=x^2+4x-10=(x+2)^2-14\ \ (x\geq k)$
함수 f가 일대일 대응이려면 x가 증가할 때 $f(x)$가 증가만 하거나 감소만 해야한다. 즉, 증가하다가 감소하거나, 감소하다가 증가하면 안된다.
따라서 정의역 $X=\{x|x\geq k\}$에서 $k\geq -2$
또한 X에서 X로의 함수 f는 일대일대응이므로 정의역과 치역이 같아야한다.
따라서 $f(k)=k$

$$k^2+4k-10=k\quad (k+5)(k-2)=0$$

$k\geq -2$이므로

$$\therefore\ k=2$$

99-1 ⑤

$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$
가. $m=n=0$인 경우
$f(0+f(0))=f(f(0))+f(0)$
만약 $f(0)=\alpha\ (\neq 0)$ 라고 가정하면
$f(\alpha)\neq f(\alpha)+\alpha\quad \therefore\ f(0)=0\quad$ (참)
나. $f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$이고
$f(m+f(n))=f(m)+f(n)$에 $m=0$, $n=m$을 대입하면
$f(fm))=f(f0))+f(m)=f(m)$
따라서 $f(m)+f(n)$ (참)
다. $m=0$ 인 경우
$f(f(n))=f(0)+f(n)=f(n)\qquad$ (참)
따라서 옳은 것은 가, 나, 다이다.

99-2 ㄱ, ㄴ, ㅁ

ㄱ. $f(4)=3$, $f(6)=5$, $f(8)=7$이므로 $\frac{f(6)+f(8)}{f(4)}=4$ (참)
ㄴ. $m=1$, $n=2$이면 $f(1)=1$, $f(2)=1$이므로 성립한다. (참)
ㄷ. (반례) $m=1$, $n=1$이면
$f(1+1)=f(2)=1$, $f(1)=1$이므로
$f(1+1)\neq f(1)+f(1)$ (거짓)
ㄹ. (반례) $m=6$, $n=7$이면 $f(6)=f(7)=5$이므로 거짓
ㅁ. 임의의 m, $n\in N$에 대하여 $m\geq n$이면 $f(m)\geq f(n)$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

100-1 ②

주어진 함수방정식은 모든 실수 x, y 에 대한 항등식이므로

$x=y=0$ 인 경우 : $f(0)=4f(0)+f(0)+4 \quad \therefore \ f(0)=-1$

$x=1,\ y=-1$ 인 경우 : $f(1)=4f(1)+f(-1)+3$ ⋯ (1)

$x=-1,\ y=1$ 인 경우 : $f(-1)=4f(-1)+f(1)+3$ ⋯ (2)

식 (1)과 (2)를 연립하여 풀면

$$f(1)=f(-1)=-\frac{3}{4}$$

$x=1,\ y=0$ 인 경우 :

$$f(2)=4f(1)+f(0)+4$$

$$\therefore \ f(2)=0$$

$x=2,\ y=2$ 인 경우 :

$$f(6)=4f(2)+f(2)+8=8$$

100-2 1

$f(m+n)=f(m)+f(n)-2f(mn),\ \ f(1)=1$이므로

$n=1$이면

$f(m+1)=f(m)+1-2f(m)=1-f(m)$

$\therefore \ f(m+1)+f(m)=1$

$m=1$이면 $f(2)=0$이다.

$m=2$이면 $f(3)=1$이다.

$m=3$이면 $f(4)=0$이다.

⋮

x의 값이 짝수이면 함숫값은 0이 나오고, x의 값이 홀수이면 함숫값은 1이 나오는 규칙이 있다.

$\therefore \ f(2019)=1$