CONTENTS

인피니트수학연구소

1. 지수

01 거듭제곱과 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근 (n제곱하여 a가 되는 수)

$x^n = a$를 만족하는 x를 a의 n제곱근이라 한다.

실수 a의 n제곱근, 즉 방정식 $x^n = a$의 근은 실근과 허근을 통틀어 n개가 나온다. 이 중 실근 하나를 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

(2) n이 짝수인 경우

① $a > 0$일 때, 실근은 양수, 음수로 2개가 있다.
이때 a의 n제곱근 중 양수인 것을 $\sqrt[n]{a}$, 음수인 것을 $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

② $a = 0$일 때, 0의 n제곱근은 0 뿐이다. 즉, $\sqrt[n]{0} = 0$이다.

③ $a < 0$일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

(3) n이 홀수인 경우

실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나뿐이며 이것을 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

[참고] 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것을 표로 정리하면 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

필수문제 1 거듭제곱과 거듭제곱근

1. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

필수문제 2 거듭제곱과 거듭제곱근

2. $2 \le n \le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [4점]

필수문제 3 거듭제곱과 거듭제곱근

3. 자연수 $m(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47
④ 52 ⑤ 57

필수문제 4 거듭제곱과 거듭제곱근

4. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

> $\sqrt{3^{f(n)}}$ 의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

필수문제 11 로그의 기본 성질

31. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
> $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

03 로그의 밑 변환 기본 성질

$a\neq1$, $a>0$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq1,\ c>0)$

② $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq1)$

③ $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ $(c\neq1,\ c>0)$

④ $a^{\log_a b}=b^{\log_a a}=b$

개념 CHECK

32. $\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점]

33. $2^{\log_2 4}\times8^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

34. $\log_2 9\times\log_3\sqrt{2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 로그의 성질과 이차방정식의 근과

[1단계] 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

[2단계] 로그의 성질을 이용하여 구한다.

필수문제 19 로그의 성질과 이차방정식의 근과 계수의 관계

[교육청]

49. 이차방정식 $x^2-8x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자.
$\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)+\log_2\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)=k$일 때, 2^k의 값을 구하시오. [3점]

확인유제 [교육청]

50. 이차방정식 $x^2-4x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\log_{\alpha+\beta}(\alpha+1)+\log_{\alpha+\beta}(\beta+1)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

05 로그의 성질을 이용한 추론

주어진 연산의 정의를 이용하여 다음 로그의 성질을 이용하여 추론한다.
$a\neq1$, $a>0$, $b>0$일 때,

① $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

② $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq1,\ c>0)$

③ $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ $(c\neq1,\ c>0)$

필수문제 20 로그의 성질을 이용한 추론

51. 2 이상인 두 자연수 a, b에 대하여 $\mathrm{R}(a,\ b)$를

$$\mathrm{R}(a,\ b)=\sqrt[a]{b}$$

로 정의할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $\mathrm{R}(16,\ 4)=\mathrm{R}(8,\ 2)$
ㄴ. $\mathrm{R}(a,\ 5)\cdot\mathrm{R}(b,\ 5)=\mathrm{R}(a+b,\ 5)$
ㄷ. $\mathrm{R}(a,\ b)=k$이면 $a=\log_k b$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 로그의 성질의 활용

[1단계] 주어진 조건을 만족하는 식을 세운다.
[2단계] 로그의 성질을 이용하여 구하는 값을 구한다.

필수문제 23 로그의 성질의 활용

54. 다음 조건을 만족시키는 세 정수 a, b, c를 더한 값을 k라 할 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $1 \le a \le 5$
(나) $\log_2(b-a)=3$
(다) $\log_2(c-b)=2$

08 로그의 정수부분과 가우스

① 양수 x에 대하여 $\log_a x$ $(a>1)$의 정수부분이 n이면

$$n \le \log_a x < n+1 \Leftrightarrow a^n \le x < a^{n+1}$$

② $[\log_a x]=n \Leftrightarrow n \le \log_a x < n+1$
($[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[참고] $[x]=x$이면 x는 정수이다.

[참고] $\log N = n+\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$의 성질
(1) 정수부분(n) : 진수의 자리수 결정
① 진수 N의 정수부분이 n자리수이면 $\log N$의 정수부분은 $n-1$이다.
② 진수 N이 소수 제n자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나오면 $\log N$의 정수부분은 $-n$이다.
(2) 소수부분(α) : 진수의 숫자 배열을 결정
숫자 배열이 같고 소수점의 위치만 다른 수들의 상용로그의 소수부분은 모두 같다.
(3) a^k의 최고자리의 숫자 찾기
[1단계] $\log a^k$의 소수부분 α를 구한다.
[2단계] $\log N < \alpha < \log(N+1)$을 만족시키는 한 자리의 자연수 N의 값을 구한다.
[3단계] a^k의 최고자리의 숫자는 N이다.

개념 CHECK

55. $1 \le \log n < 3$인 자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 정수가 되도록 하는 n의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

필수문제 24 로그의 정수부분과 가우스

56. $\log 25000$의 정수부분과 소수부분을 각각 m, α라 하고 $\log 0.025$의 정수부분과 소수부분을 각각 n, β라 하자. 이때 $\dfrac{m^{\alpha}}{(n^2)^{\beta}}$의 값은? (단, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$) [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 5

필수문제 25 로그의 정수부분과 가우스

57. $\log_2 a$의 정수 부분은 4가 되고 $\log_3 a$의 정수 부분은 3이 되는 자연수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

09 로그의 증명

로그의 성질에 대한 증명과정에 대한 빈칸추론
➲ 지수법칙에서 유도되는 로그의 성질 및 공식을 이용하여 해결한다.

필수문제 26 로그의 증명

58. 다음은 지수법칙 $a^{r+s}=a^r a^s$ 으로부터 모든 양수 $x,\ y$ 에 대하여

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$$

가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a\neq 1,\ a<0$)

| 증 명 |

$r=\log_a x,\ s=\log_a y$ 로 놓으면
$a^r=x,\ a^s=\boxed{(가)}$
지수법칙으로부터
$a^{r+s}=\boxed{(나)}$
로그의 정의에 의하여
$r+s=\log_a \boxed{(나)}$
그러므로 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

① $x,\ x+y$ ② $y,\ x+y$ ③ $x,\ xy$
④ $y,\ xy$ ⑤ $x,\ \dfrac{x}{y}$

필수문제 27 로그의 증명

59. 다음은 $\log_a b$를 임의의 양수 $c\ (c\neq 1)$를 밑으로 하는 로그로 바꾸어 나타낼 수 있음을 증명한 것이다.

| 증 명 |

$\log_a b=x,\ \log_c a=y$ 라고 하면
$a^x=b,\ c^y=a$ 이다.
이때, $b=c^{\boxed{(가)}}$ 이므로 $\boxed{(가)}=\log_c b$ 이다.
즉, $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$ 이다.
여기서 $\boxed{(나)}$ 이므로 $\log_c a\neq 0$ 이다.
따라서 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

위의 증명에서 (가)와 (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	xy	$a\neq 1$
②	xy	$a>0$
③	$x+y$	$a\neq 1$
④	$x+y$	$a>0$
⑤	$\dfrac{x}{y}$	$a\neq 1$

필수문제 38 로그의 실생활 활용

70. 어느 물탱크에 서식하고 있는 박테리아를 제거하기 위하여 약품을 투여하려고 한다. 물탱크에 있는 물 $1\mathrm{mL}$ 당 초기 박테리아의 수를 C_0, 약품을 투여한지 t 시간이 지나는 순간 $1\mathrm{~mL}$ 당 박테리아 수를 C 라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 하자.

$$\log\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}_0}=-kt\ (k\text{는 양의 상수})$$

물 $1\mathrm{~mL}$ 당 초기 박테리아 수가 8×10^5 이고, 약품을 투여한 지 3 시간이 지나는 순간 $1\mathrm{~mL}$ 당 박테리아 수는 2×10^5 이 된다고 한다. 약품을 투여한 지 a 시간 후에 처음으로 $1\mathrm{mL}$ 당 박테리아 수가 8×10^3 이하가 되었다. a 의 값을 구하시오.

(단, $\log 2=0.3$ 으로 계산한다.) [4 점]

필수문제 39 로그의 실생활 활용

71. 총 인구에서 65 세 이상 인구가 차지하는 비율이 $20\,\%$ 이상인 사회를 '초고령화 사회'라고 한다. 2015 년 어느 나라의 총 인구는 1000 만 명이고 65 세 이상 인구는 50 만 명이었다. 총 인구는 매년 전년도보다 $0.3\,\%$ 씩 증가하고 65 세 이상 인구는 매년 전년도보다 $4\,\%$ 씩 증가한다고 가정할 때, 처음으로 '초고령화 사회'에 진입하는 해는 몇 년인지 구하여라. (단, $\log 1.003=0.0013$, $\log 1.04=0.0170$, $\log 2=0.3010$) [4 점]

1. 지수함수

01 지수함수의 그래프와 성질

1. 지수함수의 그래프

(1) 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프

$y=a^x$	$a>1$	$0<a<1$
정의역	x는 모든 실수	x는 모든 실수
치 역	$y>0$	$y>0$
지나는 정점	$(0,\ 1)$	$(0,\ 1)$
증 · 감	증가함수	감소함수

(2) 지수함수 $y=a^x$ 의 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (증가함수)
$0<a<1$일 때, x값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (감소함수)

③ 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

④ 점근선 : $y=0$ (x축)

⑤ $y=a^x$ 의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

2. 지수함수의 성질

지수함수 $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$과 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대하여 다음이 성립한다.

① $f(x)f(y)=f(x+y)$

② $\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$

③ $f(nx)=\{f(x)\}^n$ (단, n은 자연수)

④ $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

⑤ $f\left(\frac{x}{n}\right)=\sqrt[n]{f(x)}$ (단, n은 자연수)

⑥ $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다. 즉, 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대하여

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

가 성립한다.

개념 CHECK

1. 지수함수 $y=5^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(a,\ 5)$, $(3,\ b)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 1 지수함수 그래프와 성질

2. 함수 $f(x)=2^{-x}$에 대하여

$$f(2a)f(b)=4,\ f(a-b)=2$$

일 때, $2^{3a}+2^{3b}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.) [3점]

필수문제 8 지수함수 그래프와 성질

10. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $x_2>\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 지수함수의 평행이동과 대칭이동

(1) 지수함수 $y=a^{x-m}+n\ (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프

$y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이고, 점근선은 $y=n$인 그래프이다.

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\mid y>n\}$이다.
② 직선 $y=n$을 점근선으로 갖는다.
③ a의 값에 관계없이 항상 점 $(m,\ 1+n)$을 지난다.

(2) 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 0)$의 대칭이동

x축 대칭	y축 대칭	원점 대칭	$y=x$대칭
$y=-a^x$	$y=a^{-x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$	$y=-\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$	$x=a^y$ $y=\log a^x$

개념 CHECK

11. 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때, 상수 m의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

12. 좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지난다. 양수 a의 값은? [3 점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

13. 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(0,\ 5)$를 지날 때, m^2+n^2의 값을 구하시오. [3 점]

14. 함수 $y=5^{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=25\cdot 5^{2x}+2$의 그래프가 되었다. $m+n$의 값은? [3 점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

필수문제 9 지수함수의 평행이동과 대칭이동

15. 지수함수의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4 점]

| 보 기 |

ㄱ. $y=2^x$ 의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\dfrac{1}{2^x}$ 의 그래프가 된다.
ㄴ. $y=2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^x$ 의 그래프보다 아래에 놓이게 된다.
ㄷ. $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 $y=2^x$ 의 그래프를 얻을 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 10 지수함수의 평행이동과 대칭이동

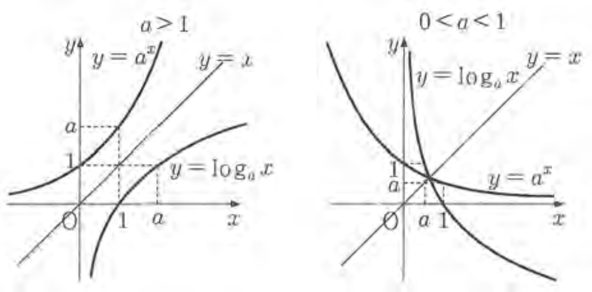
16. 함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동 시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$이 점 $\mathrm{A}'(3,\ g(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

2. 로그함수

01 로그함수의 그래프와 성질

1. 로그함수의 그래프
(1) 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프



(2) 로그함수 $y=\log_a x$의 성질
① 정의역은 양수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
② $a>1$일 때, x값이 증가하면 y값도 증가한다. (증가함수)
$0<a<1$일 때, x값이 증가하면 y값은 감소한다. (감소함수)
③ 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.
④ 점근선 : $x=0$(y축)
⑤ $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

2. 로그함수의 성질
$x>0,\ y>0$일 때,
로그함수 $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 성질
① $f(1)=0,\ f(a)=1$
② $f(xy)=f(x)+f(y)$
③ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$
④ $f(x^n)=nf(x)$ (단, n은 실수)
⑤ $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

개념 CHECK

17. 함수 $y=a+\log_2 x$의 그래프가 점 $(4,\ 7)$을 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

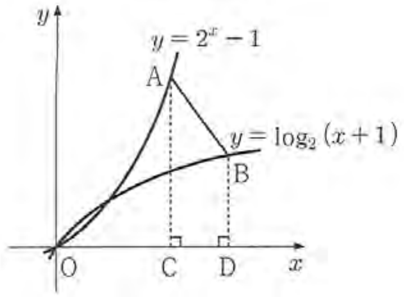
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 $y=x$에 대칭을 이용한 넓이

$y=x$에 대칭인 지수함수와 로그함수를 이용한 넓이를 구한다.

필수문제 50 $y=x$에 대칭을 이용한 넓이

71. 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는? [3 점]



① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3
④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

4. 지수 로그함수의 최대 최소

01 지수함수 로그함수의 최대 최소

(1) $y=a^{f(x)}$의 최대최소
① $a>1$이면 $f(x)$가 최대일 때, $y=a^{f(x)}$은 최댓값, $f(x)$가 최소일 때, $y=a^{f(x)}$은 최솟값을 가진다.
② $0<a<1$이면 $f(x)$가 최대일 때, $y=a^{f(x)}$은 최솟값, $f(x)$가 최소일 때, $y=a^{f(x)}$은 최댓값을 가진다.

(2) $y=\log_a f(x)$의 최대최소 (단, $a>0,\ a\neq 1$)
진수의 최대·최소로 결정한다.
① $a>1$인 경우
$\Rightarrow$ $f(x)$가 최대이면 y는 최대, $f(x)$가 최소이면 y는 최소
② $0<a<1$인 경우
$\Rightarrow$ $f(x)$가 최대이면 y는 최소, $f(x)$가 최소이면 y는 최대

개념 CHECK

72. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수

$$f(x)=2^{|x|}$$

의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]
① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

73. 함수

$$f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$$

가 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]
① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

5. 주기함수의 활용

01 지수함수 로그함수와 주기함수의 활용

① $f(x+p)=f(x)$이면 $y=f(x)$는 주기가 p인 주기함수이다.

② $f(a+x)=f(b-x)$이면 $y=f(x)$는 $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대하여 대칭이다.

필수문제 55 지수함수 로그함수와 주기함수의 활용

86. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\ \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)\text{이다.}$$

자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

변형문제 [교육청]

87. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2\le x\le 0$일 때, $f(x)=|x+1|-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$

$-10\le x\le 10$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

6. 고난도 문항

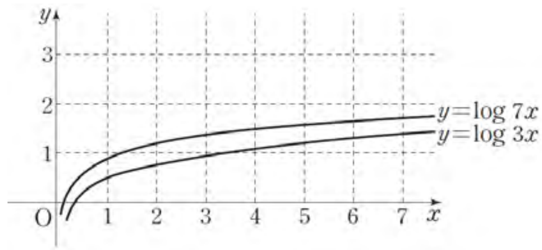
01 격자점의 개수

지수함수의 그래프에서 격자점의 개수는 x좌표를 기준으로
로그함수의 그래프에서 격자저의 개수는 y좌표를 기준으로
생각해 보자.

필수문제 56 격자점의 개수

88. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
(나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



필수문제 57 격자점의 개수

89. 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20이상 40이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. [4점]

필수문제 58 격자점의 개수

90. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t\ (t\geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.
다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다.
[4점]

(가) $2\leq a\leq 10$, $2\leq b\leq 10$
(나) $t\geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\leq 10$이다.

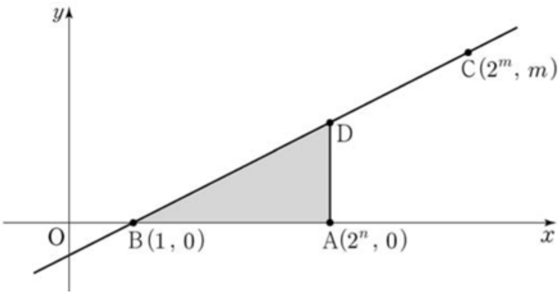
02 고난도 문항

지수, 로그함수의 성질을 이용해 해석한다.

필수문제 59 고난도 문항

91. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

(가) 점 A의 좌표는 $(2^n,\ 0)$이다.
(나) 두 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$과 $\mathrm{C}(2^m,\ m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.



① 109 ② 111 ③ 113
④ 115 ⑤ 117

필수문제 60 고난도 문항

92. 3보다 큰 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a라 하자.

(가) $a \geq 3$
(나) 두 점 $(2,\ 0)$, $(a,\ \log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5)=4$이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

필수문제 7 지수방정식

15. 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-2x+1$에 대하여 $(g \circ f)(2^x)=\frac{1}{4}$을 만족시킬 때, x의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

필수문제 8 지수방정식

16. 함수 $f(x)=\frac{3^x}{3^x+3}$에 대하여 점 $(p,\ q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이면 실수 p의 값에 관계없이 점 $(2a-p,\ a-q)$도 항상 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다. 다음은 상수 a의 값을 구하는 과정이다.

점 $(2a-p,\ a-q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3}=a-\boxed{(가)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. ㉠은 실수 p의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$p=0$일 때, $\frac{3^{2a}}{3^{2a}+3}=a-\frac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이고,

$p=1$일 때, $\frac{3^{2a}}{3^{2a}+\boxed{(나)}}=a-\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이다. ㉡, ㉢에서

$$(3^{2a}+3)\left(3^{2a}+\boxed{(나)}\right)=24\times3^{2a}$$

이므로

$$a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=\boxed{(다)}$$

이다. 이때, ㉢ 에서 좌변이 양수이므로 $a>\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a=\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(p)$라 하고 (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 m, n이라 할 때, $(m-n)\times g(2)$의 값은? [4점]

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

02 지수방정식과 이차방정식의 실근의 활용

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$에 대하여
$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
(1) 두 근 α, β가 양의 실근을 가질 조건
① $D=b^2-4ac\geq 0$ ② $\alpha+\beta>0$ ③ $\alpha\beta>0$

(2) 두 근 α, β가 모두 p보다 클 조건
① $D=b^2-4ac\geq 0$ ② $f(p)>0$ ③ $p<-\dfrac{b}{2a}$
(3) 두 근 사이에 p가 있을 조건
$f(p)<0$

필수문제 9 지수방정식과 이차방정식의 실근의 활용

17. 방정식

$$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$$

이 실근을 갖기 위한 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점

03 로그방정식

① $\log_a x$가 반복되는 경우에는 $\log_a x$를 t로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

② 지수, 밑 동시변수 : 양변에 밑이 같은 로그를 취하고 치환한다.

[참고] 로그방정식에서의 유의사항
진수>0, 밑$\neq 1$, 밑>0임을 명심해야 한다.

③ 로그방정식 $p(\log_a x)^2+q(\log_a x)+r=0$의 두 근이 α, β라 하면 $\log_a x$를 t로 치환한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근은 $\log_a \alpha$, $\log_a \beta$이다.

개념 CHECK

18. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

19. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 14 로그 방정식

36. 시간 t에 따라 감소하는 함수 $f(t)$에 대하여 $f(t+c)=\frac{1}{2}f(t)$를 만족시키는 양의 상수 c를 $f(t)$의 반감기라 한다. 함수 $f(t)=3^{-t}$의 반감기는?

① $\frac{1}{3}\log_3 2$ ② $\frac{1}{2}\log_3 2$ ③ $\log_3 2$
④ $2\log_3 2$ ⑤ $3\log_3 2$

04 지수함수 로그함수에서 방정식의 활용

지수함수와 로그함수에서 주어진 조건을 만족하는 값을
지수방정식과 로그방정식의 성질을 이용하여 구한다.

필수문제 15 지수함수 로그함수에서 방정식의 활용

37. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

필수문제 16 지수함수 로그함수에서 방정식의 활용

38. 두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$일 때, 상수 k의 값은? [3 점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2. 지수 로그 부등식

01 지수 부등식

(1) 지수부등식은 밑이 1보다 큰지, 작은지 반드시 확인한다.
① $a>1$일 때는 부등호 방향이 그대로이다.(증가함수)
$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Rightarrow f(x)<g(x)$
② $0<a<1$일 때는 부등호 방향이 반대로 바뀐다.(감소함수)
$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Rightarrow f(x)>g(x)$

(2) 지수부등식 $p(a^x)^2+qa^x+r>0$
a^x꼴이 반복되는 지수부등식은 $a^x=t\,(t>0)$로 치환하여 부등식을 푼다.

개념 CHECK

39. 부등식 $\frac{27}{9^x}\geq 3^{x-9}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [3 점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

40. 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}\geq 4$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3 점]

필수문제 27 로그 부등식

68. 부등식 $|a-\log_2 x| \le 1$을 만족시키는 x의 최댓값과 최솟값의 차가 18일 때, 2^a의 값은? [3점]

① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

변형문제

69. 부등식 $|\log_2 a-\log_2 10|+\log_2 b \le 1$을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 15　② 17　③ 19
④ 21　⑤ 23

필수문제 28 로그 부등식

70. 연립부등식

$$\begin{cases} \log_3|x-3|<4 \\ \log_2 x+\log_2(x-2) \ge 3 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. [3점]

필수문제 29 로그 부등식

71. 정수 n에 대하여 두 집합 $\mathrm{A}(n)$, $\mathrm{B}(n)$이

$$\mathrm{A}(n)=\{x \mid \log_2 x \le n\}$$
$$\mathrm{B}(n)=\{x \mid \log_4 x \le n\}$$

일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $\mathrm{A}(1)=\{x \mid 0<x\le 1\}$
ㄴ. $\mathrm{A}(4)=\mathrm{B}(2)$
ㄷ. $\mathrm{A}(n)\subset \mathrm{B}(n)$일 때, $\mathrm{B}(-n)\subset \mathrm{A}(-n)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

필수문제 30 로그 부등식

72. n이 자연수일 때, 보기의 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면? [3점]

| 보 기 |

ㄱ. $\log_2(n+3)>\log_2(n+2)$
ㄴ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+2)$
ㄷ. $\log_{\frac{1}{2}}(n+2)>\log_{\frac{1}{3}}(n+2)$

①ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

확인유제

73. n이 자연수일 때, 다음 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면? [3점]

| 보 기 |

ㄱ. $\log_2(n+3)>\log_2(n+2)$
ㄴ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+2)$
ㄷ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+3)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 모든 실수에서 만족하는 부등식

(1) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건
$\Leftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 항상 x축 위쪽에 있다.
$\Leftrightarrow$ $a>0$, $D=b^2-4ac<0$
② 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 항상 성립할 조건
$\Leftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축에 접하거나 위쪽에 있다.
$\Leftrightarrow$ $a>0$, $D=b^2-4ac\leq 0$

필수문제 31 모든 실수에서 만족하는 부등식

[교육청]

74. 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

변형문제 [교육청]

75. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k\cdot 2^x\leq 4^x-2^x+4$가 성립하도록 하는 실수 k값의 범위는? [3점]

① $k\leq -1$ ② $-4\leq k\leq 3$ ③ $-1\leq k\leq 3$
④ $k\leq 3$ ⑤ $k\geq 0$

04 지수 로그의 실생활 활용

(1) 지수로그방정식의 실생활 활용
[1단계] 주어진 공식의 문자를 이해한다.
[2단계] 문자에 식을 대입하여 지수법칙과 로그의 성질을 이용하여 방정식을 구한다.
(2) 지수로그부등식의 실생활 활용
[1단계] 주어진 공식의 문자를 이해한다.
[2단계] 문자에 식을 대입하여 지수법칙과 로그의 성질을 이용하여 부등식을 구한다.

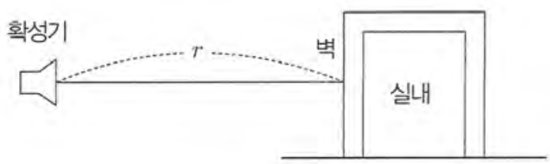
필수문제 32 지수 로그의 실생활 활용

76. 소리가 건물의 벽을 통과할 때, 일정 비율만 실내로 투과되고 나머지는 반사되거나 흡수된다. 이때, 실내로 투과되는 소리의 비율을 투과율이라 한다. 확성기의 음향출력이 W(와트)일 때, 투과율이 α인 건물에서 $r(\mathrm{m})$만큼 떨어진 지점에 있는 확성기로부터 실내로 투과되는 소리의 세기 P(데시벨)는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}=10\log\frac{\alpha\,\mathrm{W}}{\mathrm{I}_0}-20\log r-11$$

(단, $\mathrm{I}_0=10^{-12}(\mathrm{W/m^2})$이고 $r>1$이다.)

확성기에서 음향출력이 $100\mathrm{W}$인 소리가 나오고 있다. 투과율이 $\frac{1}{100}$인 건물의 실내로 투과되는 소리의 세기가 59(데시벨) 이하가 되게 할 때, 확성기와 건물 사이의 최소 거리는?
(단, 소리는 공간으로 골고루 퍼져나가고, 투과율 이외의 다른 요인은 고려하지 않는다고 가정한다.) [4점]

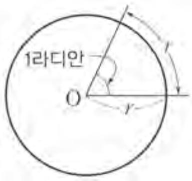


① $10^{\frac{5}{2}}\mathrm{m}$ ② $10^{\frac{9}{4}}\mathrm{m}$ ③ $10^{\frac{13}{6}}\mathrm{m}$
④ $10^{\frac{17}{8}}\mathrm{m}$ ⑤ $10^2\mathrm{m}$

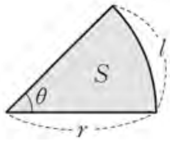
1. 일반각과 호도법

01 **부채꼴**

(1) 호도법
호의 길이를 이용하여 각의 크기를 나타내는 방법이다.
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원O에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각 $\angle \mathrm{AOB}$의 크기를 1라디안(radian)이라 하고, 이를 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라 한다.



(2) 부채꼴의 호의 길이와 넓이
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $\theta(\mathrm{rad})$인 부채꼴에서
① 호의 길이
② 부채꼴의 넓이 $\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$
③ 부채꼴의 둘레의 길이 $=2r+l$



[참고] 둘레의 길이가 a인 부채꼴의 넓이가 최대이려면 반지름 $r=\dfrac{1}{4}a$일 때,
넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{16a^2}$, 호의 길이 $l=a-2r=a-2\dfrac{1}{4}a=\dfrac{1}{2}a$
중심각 $\theta=\dfrac{1}{r}=2$

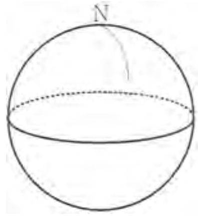
개념 CHECK

1. 둘레의 길이가 10cm 인 부채꼴 가운데 그 넓이가 최대인 것의 반지름의 길이는 몇 cm 인가?

① 2　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3
④ $\dfrac{10}{3}$　⑤ 4

필수문제 1 부채꼴

2. 반지름이 30인 구 위의 한 점 N에 길이가 5π인 실의 한 끝을 고정한다. 실을 팽팽하게 유지하면서 구의 표면을 따라 실의 나머지 한 끝을 한 바퀴 돌렸을 때, 구의 표면에 생기는 실 끝의 자취의 길이를 l이라 하자. $\dfrac{l}{\pi}$의 값을 구하시오. [3 점]



1. 등차수열

01 등차수열의 일반항

① 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항
$a_n = a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
② 등차수열의 관계식 : 이웃하는 항 사이의 관계

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + d \\ 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \end{array}\right] \Rightarrow a_n = a+(n-1)d$$

[참고] 등차수열의 성질
① $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$
② 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 또는 상수로 표현되면 이 수열은 등차수열이다. 이때, n의 계수가 공차이다.

개념 CHECK

1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5,\ a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]
① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 6,\ a_4 + a_6 = 36$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]
① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 7,\ a_2 + a_5 = 16$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = 20$일 때, a_2의 값은? [2점]
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

5. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10} - a_7 = 6$$

일 때, a_4의 값은? [3점]
① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 = 5,\ a_{15} = 25$$

일 때, a_{20} 의 값을 구하시오. [3점]

05 등차수열의 식 작성

다음은 등차수열을 이루는 몇 개의 수를 잡는 방법 중 계산이 편리해질 수 있는 방법이다.

① 세 수가 등차수열을 이룰 때, 식의 작성
⇨ $a-d,\ a,\ a+d$ ⬅ 공차 d
② 네 수가 등차수열을 이룰 때, 식의 작성
⇨ $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$ ⬅ 공차 $2d$
③ 다섯 개의 수가 등차수열을 이룰 때, 식의 작성
⇨ $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$ ⬅ 공차 d

필수문제 7 등차수열의 식 작성

25. 고대 이집트의 수학 문헌인 아메스 파피루스 (기원전 1650년경)에는 다음과 같은 문제가 기록되어 있다.

> 다섯 사람에게 120개의 빵을 나누어 주는데 각자의 배당 몫이 등차수열을 이루고, 가장 적게 배당 받는 사람과 그 다음으로 적게 배당 받는 사람의 몫의 합이 나머지 세 사람 몫의 합의 $\frac{1}{7}$이 되도록 하라.

위와 같이 빵을 나누어 줄 때, 가장 많이 배당 받는 사람의 몫은? [4점]

① 52 ② 50 ③ 48
④ 46 ⑤ 44

06 등차수열의 합

(1) 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

① 첫째항이 a, 공차가 d가 주어진 경우
⇨ $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

② 첫째항이 a, 제n항 l(끝항)이 주어지는 경우
⇨ $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 합의 성질

$$S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(a_2+a_{n-1})}{2} = \cdots$$

개념 CHECK

26. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6 = 2(S_3 - S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은?

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

27. 첫째항이 -6이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 30일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

42. $\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)} = \frac{15}{4}$ 일 때, n의 값은? [3 점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

43. $\sum_{k=1}^{14} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3 점]

44. 첫째항이 2이고, 각항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$ 일 때, S_{11}의 값은?

[3 점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

필수문제 15 분수꼴의 수열의 합

45. 첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$

의 값은? [4 점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

필수문제 16 분수꼴의 수열의 합

46. 자연수 n에 대하여 부등식 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n \le 1$을 만족시키는 모든 자연수 k의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

09 근과 계수의 관계와 시그마 계산

[1단계] 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 합과 곱을 구한다.
[2단계] 시그마의 성질을 이용하여 계산한다.

개념 CHECK

47. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$$

의 두 근의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$의 값은? [3점]

① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

48. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$의 값은? [3점]

① 255 ② 265 ③ 275
④ 285 ⑤ 295

필수문제 17 근과 계수의 관계와 시그마 계산

49. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구하시오.

[4점]

10 $\sum$로 표현된 S_n과 a_n의 관계

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$일 때,

[1단계] $a_1=S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_k$

[2단계] $a_n=S_n-S_{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ $(n\geq 2)$

임을 이용하여 a_n을 구한다.

개념 CHECK

50. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$일 때, a_{47}의 값을 구하시오. [3 점]

필수문제 25 로그의 성질과 수열의 합

59. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150 ② 154 ③ 158
④ 162 ⑤ 166

12 수열과 지수함수 로그함수

등차, 등비 및 시그마의 기본공식에 따라 지수 로그함수 그래프의 관계를 이해하여 문제를 푼다.

필수문제 26 수열과 지수함수 로그함수

60. x축 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 세 함수

$$y=8^x,\quad y=a^x,\quad y=\log_2 x$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q, R이라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}$, $\overline{\mathrm{AR}}$이 차례로 등비수열을 이룰 때, a^4의 값을 구하시오.

(단, $2<a<8$) [3점]

2. 발견적 추론 문제

01 규칙성 추론

주어진 일반항을 통해 수열의 규칙이 파악되지 않으면 첫째항부터 몇 개의 항을 직접 구해서 나열해야 한다. 일반항만 보아서는 도저히 규칙을 찾을 수 없을 것 같은 수열도 실제 항을 직접 구해보면 일정한 주기로 반복되는 규칙을 찾을 수 있기 때문이다.

개념 CHECK

63. 다음과 같이 1부터 연속된 자연수가 규칙적으로 나열 되어 있다.

1행	1					
2행	2	3				
3행	4	5	6			
4행	7	8	9	10		
5행	11	12	13	14	15	
		…				
10행	……………………………………					$\square$

10행의 마지막에 들어갈 수는? [2점]

① 45 ② 50 ③ 55
④ 60 ⑤ 65

필수문제 29

64. 수열 $\{a_n\}$의 제n항 a_n을 $\dfrac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$이고 $a_6=1$이다. $a_m=3$일 때, $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}$의 값을 구하시오. [4점]

필수문제 30 규칙성 추론

65. 자연수 n의 모든 양의 약수를 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$라 할 때,

$$x_n = (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + \ \cdots\ + (-1)^{a_k}$$

이라 하자. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4 점]

(단, m은 음이 아닌 정수 이다.)

| 보 기 |

ㄱ. $x_8 = 2$

ㄴ. $n = 3^m$ 이면 $x_n = -m+1$ 이다.

ㄷ. $n = 10^m$ 이면 $x_n = m^2 - 1$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 31 규칙성 추론

66. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sqrt{17}-4 = \frac{1}{8+a_1} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}} = \cdots$$

을 만족시킬 때, a_{2002}의 값은?

① $\sqrt{17}-4$ ② $3-\sqrt{17}$ ③ $5-\sqrt{17}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17}+4$

1. 수학적 귀납법

01 등차수열의 귀납적 정의

등차수열을 나타내는 점화식

① $a_{n+1}=a_n+d \Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d$

⬅ 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열

② $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2} \Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

[참고] 조화수열을 나타내는 점화식

① $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+d \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=d$

⬅ 수열 $\{a_n\}$은 조화수열

② $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$

개념 CHECK

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

를 만족시킨다. $a_2=-1$, $a_3=2$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은? [3점]

① 95 ② 90 ③ 85
④ 80 ⑤ 75

필수문제 1 등차수열의 귀납적 정의

2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$a_1=1$, $a_2=3$

$(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_na_{n+1}+4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때, a_{20}의 값은?

(단, $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$ 이다.) [3점]

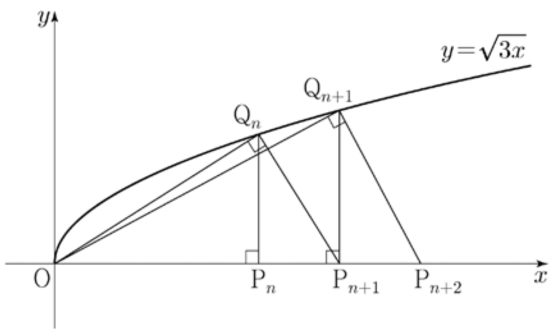
① 39 ② 43 ③ 47
④ 51 ⑤ 55

필수문제 2 등차수열의 귀납적 정의

3. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

(가) 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
(나) 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.
$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times(\boxed{(나)})\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

필수문제 3 등차수열의 귀납적 정의

4. 다음은 어느 시력검사표에 표시된 시력과 그에 해당되는 문자의 크기를 나타낸 것의 일부이다.

시력	0.1	0.2	0.3	0.4	$\cdots$	1.0
문자의 크기	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{10}

문자의 크기 a_n은 다음 관계식을 만족시킨다.

$$a_1=10A,\ a_{n+1}=\frac{10A\cdot a_n}{10A+a_n}$$

(단, A는 상수이고 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$이다.)

이 시력검사표에서 시력 0.8에 해당되는 문자의 크기는? [4점]

① $2A$ ② $\frac{3}{2}A$ ③ $\frac{4}{3}A$
④ $\frac{5}{4}A$ ⑤ $\frac{6}{5}A$

필수문제 17 항을 나열하여 규칙을 찾는 수학적 귀납법

29. 한 평면에 서로 다른 n개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$이라 하자. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $f(2)=3$, $g(2)=4$이다.
ㄴ. 모든 n에 대하여 $f(n)=n+1$이다.
ㄷ. 모든 n에 대하여 $g(n) \le f(n+1)$이다.

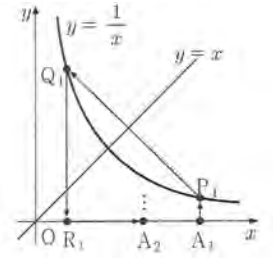
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 18 항을 나열하여 규칙을 찾는 수학적 귀납법

30. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.
(나) (1) 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선 곡선 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$과 만나는 점을 P_n이라 한다.
(2) 점 P_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q_n이라 한다.
(3) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
(4) 점 R_n을 x축 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하자. $x_5=\dfrac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



필수문제 27 주기성을 이용한 귀납적 정의

39. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n & (a_n \geq 2)\\ \sqrt[3]{2}\,a_n & (a_n<2)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_{112}의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt[3]{4}$ ⑤ 2

필수문제 28 주기성을 이용한 귀납적 정의

40. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$의 값은? [4점]

① -2011 ② -2010 ③ 0
④ 2010 ⑤ 2011

필수문제 29 주기성을 이용한 귀납적 정의

41. $p \geq 2$인 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$
(나) $a_{k+1} = a_k + 1 \ (1 \leq k \leq p-1)$
(다) $a_{k+p} = a_k \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$

보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$
ㄴ. $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = \dfrac{p(p-1)}{2}$
ㄷ. $a_p + a_{2p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 홀수와 짝수에 따라 다르게 정의된

수열의 관계식이 n 또는 a_n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 다르게 나타내는 경우에는 수열의 특성을 찾기가 어렵다.
이때, n 또는 a_n의 조건에 알맞은 식의 n에 $1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 항을 구하고 규칙을 찾아 항을 구한다.

개념 CHECK

42. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_7의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

필수문제 30 홀수와 짝수에 따라 다르게 정의된 수열의 귀납적 정의

43. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91　② 92　③ 93
④ 94　⑤ 95

확인유제

44. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$일 때, a_{25}의 값은? [4점]

① 78　② 80　③ 82
④ 84　⑤ 86

필수문제 31 홀수와 짝수에 따라 다르게 정의된 수열의 귀납적 정의

45. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2 - 3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 1 + a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40} a_n$의 값은? [3점]

① 30　② 35　③ 40
④ 45　⑤ 50

필수문제 32 홀수와 짝수에 따라 다르게 정의된 수열의 귀납적 정의

46. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고, $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

08 $a_{n+1}=pa_n+q$의 귀납적

$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1,\ q\neq 0)$꼴에서 일반항 a_n을 구할 때,

[1단계] $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)\left(\alpha=\dfrac{q}{1-p}\right)$꼴로 변형한다.

[2단계] 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p인 등비수열

⇨ $a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}$

개념 CHECK

47. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2$$

일 때, a_{10}의 값은?

① 1022 ② 1024 ③ 2021
④ 2046 ⑤ 2082

필수문제 49 일반항을 구하는 빈칸추론

64. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=a_2=1$이고, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때, $a_{n+1}=\dfrac{S_n^{\ 2}}{S_{n-1}}+(2n-1)S_n\ (n\ge 2)$를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 주어진 식으로부터
> $$a_{n+1}=\frac{S_n^{\ 2}}{S_{n-1}}+2nS_n\ (n\ge 2)$$
> 이다. 양변을 S_n으로 나누면
> $$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_n}{S_{n-1}}+2n$$
> 이다. $b_n=\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$이라 하면 $b_1=2$이고
> $$b_n=b_{n-1}+2n\ (n\ge 2)$$
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
> $$b_n=\boxed{\text{(가)}}\times(n+1)\ (n\ge 1)$$
> 이므로
> $$S_n=\boxed{\text{(가)}}\times\{(n-1)!\}^2\ (n\ge 1)$$
> 이다. 따라서 $a_1=1$이고, $n\ge 2$일 때
> $$a_n=S_n-S_{n-1}$$
> $$=\boxed{\text{(나)}}\times\{(n-2)!\}^2$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(6)$의 값은? [4점]

① 110 ② 125 ③ 140 ④ 155 ⑤ 170

필수문제 50 일반항을 구하는 빈칸추론

65. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,
$$nS_{n+1}=(n+2)S_n+(n+1)^3\ (n\ge 1)$$
이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 자연수 n에 대하여 $S_{n+1}=S_n-a_{n+1}$이므로
> $$na_{n+1}=2S_n+(n+1)^3 \quad \cdots\cdots ㉠$$
> 이다. 2 이상의 자연수 n에 대하여
> $$(n-1)a_n=2S_{n-1}+n^3 \quad \cdots\cdots ㉡$$
> 이고 ㉠에서 ㉡을 뺀 식으로부터
> $$na_{n+1}=(n+1)a_n+\boxed{\text{(가)}}$$
> 를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면
> $$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{\boxed{\text{(가)}}}{n(n+1)}$$
> 이다. $b_n=\dfrac{a_n}{n}$이라 하면
> $$b_{n+1}=b_n+3+\boxed{\text{(나)}}\ (n\ge 2)$$
> 이므로
> $$b_n=b_2+\boxed{\text{(다)}}\ (n\ge 3)$$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(3)}{g(3)h(6)}$의 값은? [4점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

필수문제 51 일반항을 구하는 빈칸추론

66. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$a_{n+1}=(2^n-1)(S_n+1)\ (n\geq 1)\quad \cdots\cdots\ (*)$$

식 $(*)$의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$$

이다. $b_n=\log_2(S_n+1)$이라 하면 $b_1=1$이고

$$b_{n+1}=\boxed{(가)}+b_n$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=\frac{n^2-n+2}{2}\ (n\geq 1)$$

이므로

$$S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\ (n\geq 1)$$

이다. 그러므로 $a_1=1$이고 $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{(나)}}$$
$$=2^{\boxed{(나)}}\times(2^{n-1}-1)$$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(12)-g(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

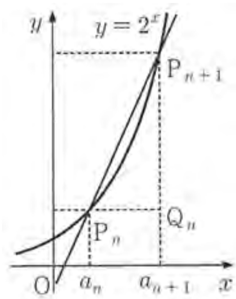
필수문제 52 일반항을 구하는 빈칸추론

67. 상수 $k\ (k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고
곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.

다음은 $a_1=1$, $\frac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.



두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로

$$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$$

이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
$k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1},\ 2^{a_n})$이므로

$$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$

이다. $\frac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{(가)}$이고,
수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\boxed{(나)}$$

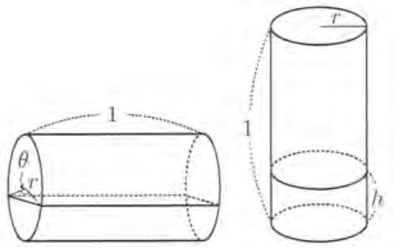
이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\frac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118 ② 121 ③ 124
④ 127 ⑤ 130

필수문제 2 부채꼴

3. 반지름의 길이가 r이고 높이가 1인 원기둥에 물이 들어있다. 원기둥을 수평으로 뉘였을 때 수면과 옆면이 만나서 이루는 현에 대한 중심각을 θ라 하자. 원기둥을 세웠을 때 수면의 높이 h를 θ로 표시하면? $\left(\text{단, } 0<\theta<\pi,\ 0<h<\frac{1}{2}\right)$ [2점]



① $h=\frac{1}{2\pi}\theta$ ② $h=\frac{1}{2\pi}\sin\theta$
③ $h=\theta-\sin\theta$ ④ $h=\frac{1}{2\pi}(\theta+\sin\theta)$
⑤ $h=\frac{1}{2\pi}(\theta-\sin\theta)$

02 두 동경의 위치 관계

두 각 α, β의 동경이 (단, n은 정수)
① α, β의 동경이 일치하면 ⇨ $\beta-\alpha=2n\pi$
② α, β의 동경이 서로 반대일 조건 ⇨ $\alpha-\beta=2n\pi+\pi$
(원점에 대하여 대칭)
③ x축에 대하여 대칭이면 ⇨ $\alpha+\beta=2n\pi$
④ y축에 대하여 대칭이면 ⇨ $\alpha+\beta=2n\pi+\pi$
⑤ $y=x$에 대하여 대칭이면 ⇨ $\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

[참고] 삼각함수의 값의 부호

	제 1사분면	제 2사분면	제 3사분면	제 4사분면
$\sin\theta$	+	+	-	-
$\cos\theta$	+	-	-	+
$\tan\theta$	+	-	+	-

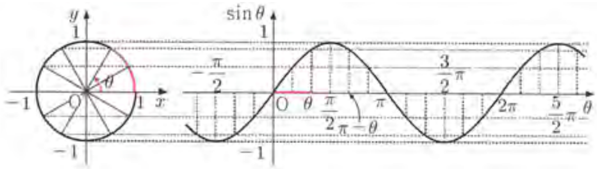
개념 CHECK

[교육청]
4. θ가 제3 사분면의 각 일 때,
$$\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-|\cos\theta|$$
을 간단히 하면?
① $\sin\theta$ ② $\cos\theta$ ③ $-\sin\theta$
④ $2\sin\theta+\cos\theta$ ⑤ $\sin\theta+2\cos\theta$

[교육청]
5. 좌표평면 위의 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기 중 하나를 $\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$라 하자. 각의 크기 6θ를 나타내는 동경이 동경 OP와 일치할 때, θ의 값은?
(단, O는 원점이고, x축의 양의 방향을 시초선으로 한다.)
① $\frac{3}{5}\pi$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{15}\pi$
④ $\frac{4}{5}\pi$ ⑤ $\frac{13}{15}\pi$

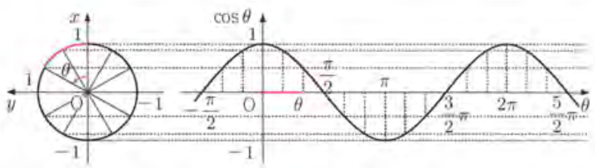
06 삼각함수의 그래프

(1) 사인함수 $y=\sin x$의 성질



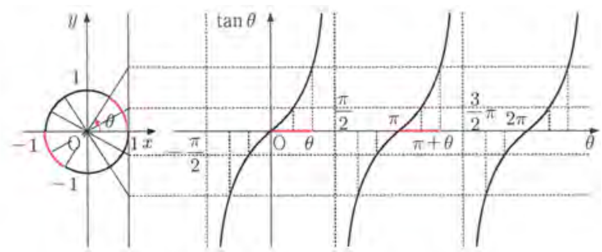
① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y| -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
② 모든 실수 x에서 연속이다.
③ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉 $\sin(-x) = -\sin x$
④ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ (단,n은 정수)
⑤ $y = \sin ax$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}$이다.

(2) 코사인 함수 $y=\cos x$의 성질



① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y| -1 \leq y \leq 1\}$이다.
② 모든 실수 x에서 연속이다.
③ 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉 $\cos(-x) = \cos x$
④ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\cos(2n\pi + x) = \cos x$ (단,n은 정수)
⑤ $y = \cos ax$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}$이다.
⑥ $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$이므로, $y = \cos x$의 그래프는 $y = \sin x$의 그래프를 x축 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

(3) 탄젠트함수 $y=\tan x$의 성질



① 정의역은 $x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
② 정의역의 모든 실수 x에서 연속이다.
③ 점근선의 직선 $x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.
④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\tan(-x) = -\tan x$
⑤ 주기가 π인 주기함수이다. 즉 $\tan(n\pi + x) = \tan x$ (단, n은 정수)
⑥ $y = \tan ax$의 주기는 $\dfrac{\pi}{|a|}$이다.

필수문제 6 삼각함수의 그래프

22. 함수 $f(x)=1-\sin 2x$에 대한 설명으로 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

| 보 기 |

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 주기는 π이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 7 삼각함수의 그래프

23. 함수

$$y=6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0\le x\le 12)$$

의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[교육청]

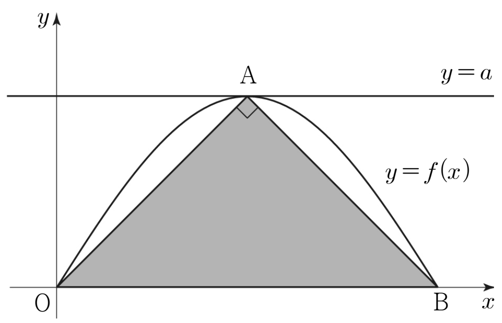
24. 그림과 같이 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{b}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=a$와 만나는 점을 A, x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 B라 하자.

$\angle OAB=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, $a+b$의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



① $1+\frac{\pi}{6}$　② $2+\frac{\pi}{6}$　③ $2+\frac{\pi}{4}$　④ $3+\frac{\pi}{4}$　⑤ $3+\frac{\pi}{3}$

07 삼각함수의 최대 최소

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없음	없음	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

[참고] 주기함수의 주의사항
① 함수 $f(x)$가 주기가 p인 주기함수이면
$f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=f(x+3p)=\cdots$
즉, $f(x+np)=f(x)$와 같이 나타낼 수 있다. (단, n은 자연수)
② 모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$의 주기를 p라 하면 $a=p$일 수도 있지만
$a=2p$, $a=3p$, $\cdots$, $a=np$, $\cdots$일 수 도 있으므로
$p=\frac{a}{n}$이다. (단, $a>0$, n은 자연수)
즉, $f(x+a)=f(x)$인 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{a}{n}$ (n은 자연수)이다.

개념 CHECK

25. 함수 $f(x)=5\sin x+1$의 최댓값을 구하시오. [3점]

26. 함수 $f(x)=4\cos x+3$의 최댓값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

필수문제 8 삼각함수의 최대 최소

27. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{5\pi}{12}$　③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{4}$　⑤ $\frac{\pi}{6}$

필수문제 9 삼각함수의 최대 최소

28. 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$　② $\frac{2}{\pi}$　③ $\frac{3}{\pi}$

④ $\frac{4}{\pi}$　⑤ $\frac{5}{\pi}$

필수문제 10 삼각함수의 최대 최소

[교육청]

29. 두 함수 $f(x)=\log_3 x+2$, $g(x)=3\tan\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$가 있다.

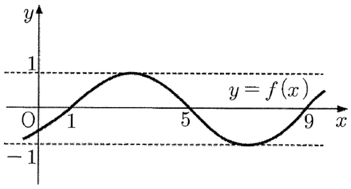
$0\le x\le \dfrac{\pi}{6}$에서 정의된 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

08 그래프가 주어진 삼각함수의 미정계수

(1) $y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$의 꼴
① a, d : 최댓값과 최솟값을 결정
함숫값을 이용하여 결정
② b : 주기를 이용하여 결정
③ c : x축의 방향으로 평행이동을 결정
(2) $y=a\tan bx+c$
① a, d : 함숫값을 이용하여 결정
② b : 주기를 이용하여 결정

개념 CHECK

30. 다음은 $f(x)=\sin(ax+b)$의 그래프이다.

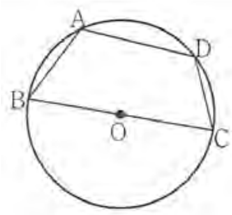


이때, $f(0)$의 값은? (단, $a>0$) [3점]

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
④ $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

필수문제 16 삼각함수의 성질

43. 그림과 같이 사각형 ABCD는 선분 BC를 지름으로 하는 원 O에 내접하고 있다. $\overline{BC}=13$이고 $\overline{CD}=5$일 때, $\sin A$의 값은? [3점]

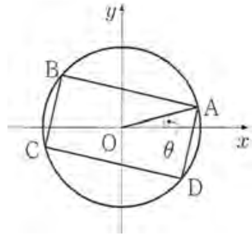


① $\frac{12}{13}$ ② $\frac{7}{13}$ ③ $\frac{5}{13}$
④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

필수문제 17 삼각함수의 성질

44. 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접해 있다. x축과 선분 OA가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos(\pi-\theta)$와 같은 것은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① 점A의 x좌표 ② 점B의 y좌표
③ 점C의 x좌표 ④ 점C의 y좌표
⑤ 점D의 x좌표

필수문제 18 삼각함수의 성질

[교육청]

45. $\pi < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < 2\pi$인 서로 다른 두 각 α, β에 대하여 $\sin\alpha = \cos\beta$를 만족할 때, [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

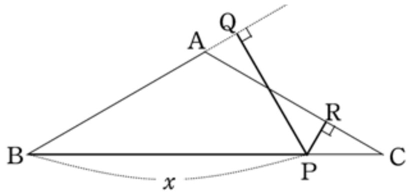
| 보 기 |

ㄱ. $\sin(\alpha+\beta)=1$
ㄴ. $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$
ㄷ. $\tan\alpha+\tan\beta=1$

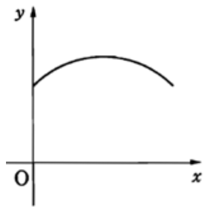
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

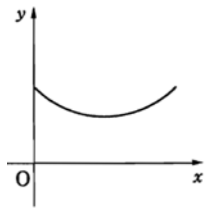
필수문제 19 삼각함수의 성질

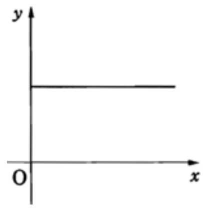
46. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 Q, 변 AC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 R라고 하자.

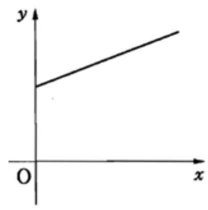


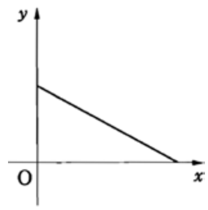
$\overline{BP}=x$와 $\overline{PQ}+\overline{PR}=y$에 대하여 y를 x의 함수로 나타낼 때, 그 그래프의 개형은? [3점]

①


②


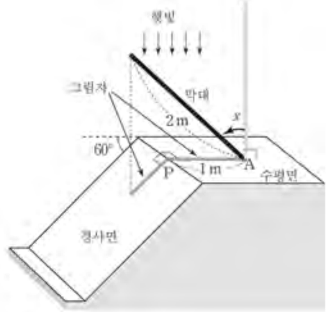
③


④


⑤


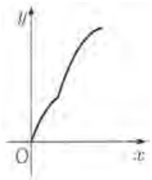
필수문제 20 삼각함수의 성질

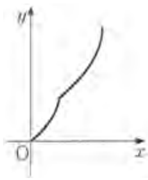
47. 그림과 같이 경사면은 수평면과 60° 를 이루고, 햇빛이 수평면에 수직으로 비치고 있다. 수평면과 경사면의 경계선 위의 한 지점 P에서 경계선과 수직으로 1 m 떨어진 수평면 위의 지점 A에 길이가 2 m인 막대를 수평면에 수직으로 세웠다.

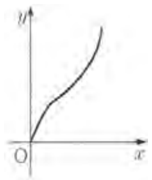


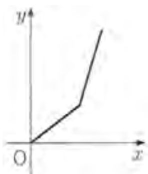
이 막대를 P 지점 쪽으로 기울여 막대와 햇빛의 방향이 이루는 각의 크기를 $x(rad)$라고 할 때, 막대의 그림자의 길이를 $f(x)$라고 하자. 다음 중 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

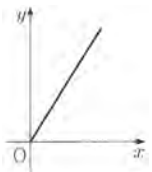
$\left(\text{단, } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ [3점]

①


②


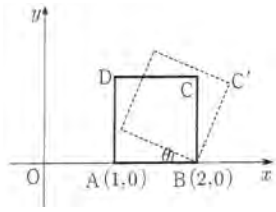
③


④


⑤


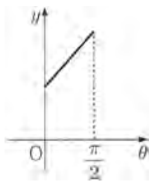
변형문제 [교육청]

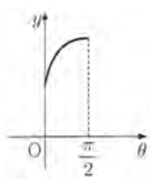
48. 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 A$(1, 0)$, B$(2, 0)$을 잇는 선분을 한 변으로 하는 정사각형 ABCD를 꼭짓점 B를 중심으로 하는 시계방향으로 θ만큼 회전시켰다. 이때, 점 C가 이동 한 점을 C$'$이라 하고, 선분 OC$'$의 길이를 $f(\theta)$라 하자.

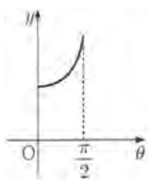


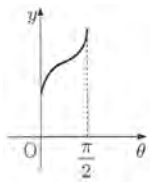
다음 중 함수 $y=\{f(\theta)\}^2$의 그래프의 개형으로 가장 적당한 것은?

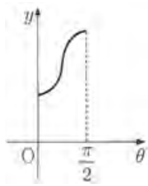
$\left(\text{단, } 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\text{이고 점 O는 원점이다.}\right)$ [4점]

①


②


③


④


⑤


2. 삼각함수의 활용

01 삼각함수의 최대 최소

[1단계] 주어진 식을 한 종류의 삼각함수로 통일시킨다.
[2단계] $\sin x$ (또는 $\cos x$)를 t로 치환한다.
[3단계] 치환하여 반드시 새로운 범위가 생긴다.
[4단계] 그래프를 이용한다.

[참고] $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$이므로
$\sin x = t$ 또는 $\cos x = t$로 치환할 경우의 t값의 범위는
$-1 \leq t \leq 1$임에 유의한다.

개념 CHECK

49. 함수 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(x + \pi)$의 최댓값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

필수문제 21 삼각함수의 최대 최소

50. a, b는 양수이고 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$이다. $a^2 + b^2 = 3ab\cos\gamma$일 때, $9\sin^2(\pi + \alpha + \beta) + 9\cos\gamma$의 최댓값을 구하시오.

변형문제 [교육청]

67. 좌표평면 위의 원점 O와 점 $P_1(1,\ 0)$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 점 $P_n(x_n,\ y_n)$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기는 $\frac{n-1}{3}\pi$이다.
>
> (나) $\overline{OP_{n+1}}=\begin{cases}\frac{1}{2}\overline{OP_n} & (y_n>0)\\ \overline{OP_n} & (y_n=0)\\ \frac{4}{3}\overline{OP_n} & (y_n<0)\end{cases}$

$\overline{OP_{50}}$의 값은? [4점]

① $\left(\frac{2}{3}\right)^8$　② $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$　③ $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^7$

④ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$　⑤ $\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^8$

06 삼각부등식의 계산

① $\sin x>k$ (또는 $\cos x>k$ 또는$\tan x>k$) 인 삼각부등식

[1단계] $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$) 의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구한다.

[2단계] $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$) 의 그래프 직선 $y=k$ 보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구한다.

② $\sin x<k$ (또는 $\cos x<k$ 또는 $\tan x<k$) 인 삼각부등식

[1단계] $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$) 의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구한다.

[2단계] $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$) 의 그래프가 직선 $y=k$ 보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구한다.

개념 CHECK

68. $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x-1=0$과 부등식 $\sin x\cos x<0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? [3점]

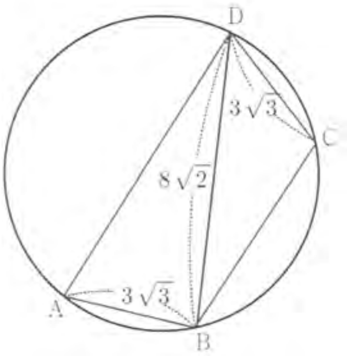
① 2π　② $\frac{7}{3}\pi$　③ $\frac{8}{3}\pi$

④ 3π　⑤ $\frac{10}{3}\pi$

필수문제 34 삼각형의 넓이

[교육청]

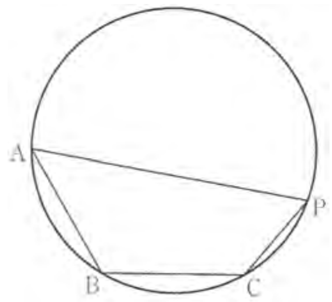
62. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=3\sqrt{3}$, $\overline{BD}=8\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\frac{S^2}{13}$의 값을 구하시오. [4점]



필수문제 35 삼각형의 넓이

[교육청]

63. 반지름의 길이가 3인 원의 둘레를 6등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AC위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{CP}=8$이다. 사각형 ABCP의 넓이는? [4점]

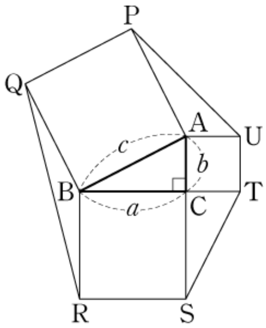


① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{19\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

필수문제 36 삼각형의 넓이

[교육청]

64. 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 한 변으로 하는 정사각형 APQB, BRSC, CTUA를 그린다. 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 c, a, b라 할 때, 다음 중 육각형 PQRSTU의 넓이를 나타낸 것은? [4점]



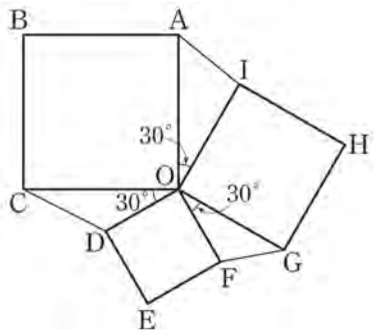
① $2(a^2+bc)$ ② $2(b^2+ca)$
③ $2(c^2+ab)$ ④ $ab+bc+ca+2a^2$
⑤ $ab+bc+ca+2c^2$

변형문제 [교육청]

65. 다음 그림과 같이 세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI와 세 삼각형 OCD, OFG, OIA는 한 점 O에서 만나고

$\angle COD = \angle FOG = \angle IOA = 30^\circ$

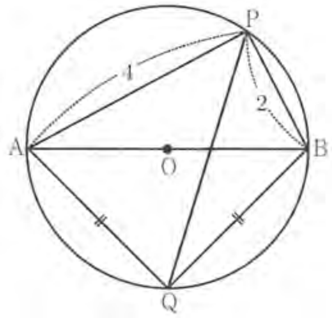
이다. 세 삼각형 넓이의 합이 26이고 세 정사각형 둘레의 길이의 합이 72일 때, 세 정사각형의 넓이의 합을 구하여라. [4점]



필수문제 37 삼각형의 넓이

[교육청]

66. 그림은 선분 AB를 지름으로 하는 원 O에 내접하는 사각형 APBQ를 나타낸 것이다. $\overline{AP}=4$, $\overline{BP}=2$이고 $\overline{QA}=\overline{QB}$일 때, 선분 PQ의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{2}$ ② $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{14}$
④ $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ ⑤ 4

1. 등차수열

01 등차수열의 일반항

① 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항
$a_n = a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
② 등차수열의 관계식 : 이웃하는 항 사이의 관계

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + d \\ 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \end{array}\right] \Rightarrow a_n = a+(n-1)d$$

[참고] 등차수열의 성질
① $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$
② 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 또는 상수로 표현되면 이 수열은 등차수열이다. 이때, n의 계수가 공차이다.

개념 CHECK

1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5,\ a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 6,\ a_4 + a_6 = 36$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 7,\ a_2 + a_5 = 16$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = 20$일 때, a_2의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

5. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10} - a_7 = 6$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 = 5,\ a_{15} = 25$$

일 때, a_{20} 의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 3 절댓값 기호를 포함한 등차수열

21. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2 의 값은? [4 점]

(가) $a_6 + a_8 = 0$
(나) $|a_6| = |a_7| + 3$

① -15 ② -13 ③ -11
④ -9 ⑤ -7

필수문제 4 절댓값 기호를 포함한 등차수열

22. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + a_5 = 0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k| + a_k) = 30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]

04 등차중항

(1) 세 수 a, x, b 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때,

x를 a와 b의 등차중항이라 하고 $x=\frac{a+b}{2}$가 성립한다.

(2) 세 수 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}가 이 순서대로 등차수열을 이루면

① $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

② $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

필수문제 5 등차중항

23. 네 수 1, x, y, z가 이 순서대로 등차수열을 이루고

$$6x+z=5y$$

를 만족시킨다. $x+y+z$의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 6 등차중항

24. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2-nx+4(n-4)=0$$

이 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

05 등차수열의 식 작성

다음은 등차수열을 이루는 몇 개의 수를 잡는 방법 중 계산이 편리해질 수 있는 방법이다.

① 세 수가 등차수열을 이룰 때, 식의 작성

⇨ $a-d,\ a,\ a+d$ ⬅ 공차 d

② 네 수가 등차수열을 이룰 때, 식의 작성

⇨ $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$ ⬅ 공차 $2d$

③ 다섯 개의 수가 등차수열을 이룰 때, 식의 작성

⇨ $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$ ⬅ 공차 d

필수문제 7 등차수열의 식 작성

25. 고대 이집트의 수학 문헌인 아메스 파피루스 (기원전 1650년경)에는 다음과 같은 문제가 기록되어 있다.

> 다섯 사람에게 120개의 빵을 나누어 주는데 각자의 배당 몫이 등차수열을 이루고, 가장 적게 배당 받는 사람과 그 다음으로 적게 배당 받는 사람의 몫의 합이 나머지 세 사람 몫의 합의 $\frac{1}{7}$이 되도록 하라.

위와 같이 빵을 나누어 줄 때, 가장 많이 배당 받는 사람의 몫은? [4점]

① 52 ② 50 ③ 48
④ 46 ⑤ 44

06 등차수열의 합

(1) 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

① 첫째항이 a, 공차가 d가 주어진 경우

⇨ $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

② 첫째항이 a, 제n항 l(끝항)이 주어지는 경우

⇨ $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 합의 성질

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\cdots$$

개념 CHECK

26. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은?

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

27. 첫째항이 -6이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 30일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

28. 첫째항이 -5이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=11}^{20} a_k$의 값은? [3점]

① 260 ② 255 ③ 250
④ 245 ⑤ 240

29. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_4 - a_2 = 4$$

일 때, $\sum_{k=11}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

30. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 200$$

일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 8 등차수열의 합

31. 1과 2 사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 2$$

의 합이 24일 때, n의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

필수문제 15 등차수열의 합

[교육청]

39. n개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$이 다음 조건을 만족한다.

> (가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
> (나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
> (다) $a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n=260$

이때 n의 값을 구하시오. [4점]

07 합 S_n과 일반항 a_n과의 관계

(1) 합 S_n과 일반항 a_n과의 관계

$S_n=a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_{n-1}+a_n$ 이라 할 때,

$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

(2) 등차수열의 합의 특징

$S_n=An^2+Bn$ (n에 관한 이차식, 상수항이 0)

$$S_n=\frac{n\{a+(n-1)d\}}{2}=\frac{dn^2+(2a-d)n}{2}$$
$$=\frac{d}{2}n^2+\frac{(2a-d)n}{2}$$
$$=An^2+Bn$$

[참고] 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 다음과 같을 때,

$S_n=An^2+Bn+C$ ($A,\ B,\ C$는 상수)

① $C=0$ 이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다. (첫째항 $a_1=S_1$)

② $C\neq 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.(첫재항 S_1)

개념 CHECK

40. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\dfrac{n}{n+1}$일 때, a_4의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{22}$ ② $\dfrac{1}{20}$ ③ $\dfrac{1}{18}$
④ $\dfrac{1}{16}$ ⑤ $\dfrac{1}{14}$

41. 첫째항이 6이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\dfrac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=2$가 성립한다. d의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

필수문제 16 합 S_n 과 a_n 과의 관계

42. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하시오. [3 점]

필수문제 17 합 S_n 과 a_n 과의 관계

43. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_k = -16,\ S_{k+2} = -12$$

를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

필수문제 18 합 S_n 과 a_n 과의 관계

44. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 10n$일 때, $a_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

필수문제 19 합 S_n 과 a_n 과의 관계

45. 공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$$

일 때 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n - 4$이다.
ㄴ. $d_1 d_2 = 4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 20 합 S_n 과 a_n 과의 관계

46. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

필수문제 21 합 S_n 과 a_n 과의 관계

47. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2=1$일 때, a_8의 값을 구하시오. [4점]

필수문제 5 등비중항

26. 다섯 개의 실수 a, b, c, d, e를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e가 다음 조건을 만족시킬 때 b가 이 수열의 제n항이라면, n의 값은? [4점]

(가) $e=\sqrt{cd}$
(나) $\dfrac{a}{e}=\dfrac{c}{d}$
(다) $a<b$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

필수문제 6 등비중항

27. 이차방정식 $x^2-kx+125=0$의 두 근 α, β $(\alpha<\beta)$에 대하여

α, $\beta-\alpha$, β

가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

03 등비수열의 합

첫째항 a, 공비 r, 항의 수 n, 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n

① $r \neq 1$이면 $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

② $r=1$이면 $S_n = na$

개념 CHECK

28. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1=1,\ \frac{S_6}{S_3}=2a_4-7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

29. 첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=3$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

30. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $\frac{S_4}{S_2}=9$ 일 때, $\frac{a_4}{a_2}$ 의 값은? [3 점]

① 3 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

필수문제 7 등비수열의 합

31. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_4-S_3=2,\ S_6-S_5=50$$

일 때, a_5 의 값을 구하시오. [4점]

필수문제 17 일정한 비율로 증가(감소)

44. 다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

> (가) 입사 첫째 해 연봉은 a 원이고, 입사 19 년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8% 씩 인상된다.
> (나) 입사 20 년째 해부터의 연봉은 입사 19 년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$ 로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28 년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$ 로 계산한다.) [4 점]

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$ ④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

필수문제 18 일정한 비율로 증가(감소)

45. 다음은 세계 석유 소비 증가 추세에 관한 글이다.

> … 매년 석유 소비량을 조사한 결과 최근 10 년 동안 소비된 석유의 양은 그 이전까지의 소비된 석유의 양과 같다. 예를 들어 1981 년부터 1990 년까지 소비된 석유의 양은 1980 년까지 소비된 석유 전체의 양과 같다.…

이와 같은 석유 소비 추세가 계속된다고 가정하고, 현재까지 소비된 석유의 양을 a, 현재의 석유 매장량을 b 라고 할 때, 앞으로 몇 년 동안 석유를 사용할 수 있겠는가?

① $10\log_2\left(\frac{b}{2a}+1\right)$ ② $10\log_2\left(\frac{b}{a}+1\right)$ ③ $10\log_2\left(\frac{2b}{a}+1\right)$ ④ $10\log_2\left(\frac{b}{a}+2\right)$ ⑤ $10\log_2\left(\frac{2b}{a}+2\right)$

1. 시그마의 계산

01 $\sum$의 기본성질

① 상수배의 성질 : $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

(단, c는 k와 관계없는 상수)

② 합과 차의 성질 : $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

(단, 복호동순)

③ 상수의 성질 : $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ (단, c는 상수)

[참고] $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$

개념 CHECK

1. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\ \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56,\ \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 8,\ \sum_{k=1}^{5} b_k = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$의 값은? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

02 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} c = c+c+\cdots+c = cn$

② $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$
$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

⑤ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
$= (1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

⑥ $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$
⇦ 홀수들의 합은 완전제곱수와 같다.
⇦ $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

개념 CHECK

16. $\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$의 값은? [3점]

① 91 ② 93 ③ 95
④ 97 ⑤ 99

17. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15} f(2k)$의 값을 구하시오. [3점]

18. $\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=300$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

19. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$의 값은? [3점]

① $2^{10}-3$ ② $2^{10}-1$ ③ 2^{10}
④ $2^{10}+1$ ⑤ $2^{10}+3$

20. $\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k-2)$의 값을 구하시오. [3점]

21. $\sum_{k=1}^{10}(k-1)(k+2)$의 값을 구하시오. [2점]

22. $\sum_{n=1}^{9} 2^{n-1}$의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 3 자연수의 거듭제곱의 합

23. 자연수 n 에 대하여 다항식 $2x^2-3x+1$을 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)$의 값을 구하시오. [3점]

03 등차수열, 등비수열의 시그마 활용

[1단계] 등차수열과 등비수열의 관계를 이용하여 일반항 a_n을 구한다.
[2단계] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

[참고]
등차수열과 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 절댓값을 포함하는 수열의 합이 주어지면

$|a_n|=\begin{cases} a_n & (a_n \ge 0) \\ -a_n & (a_n < 0)\end{cases}$인 관계를 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

개념 CHECK

24. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=55$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)$$

의 값을 구하시오. [3점]

25. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\ \frac{a_5}{a_3}=9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 11 일반항을 찾아 수열의 합 구하기

35. 자연수 $n\,(n \geq 4)$에 대하여 집합

$\mathrm{A}_n = \{x \mid x$는 한 변의 길이가 1인 정n각형의 대각선의 길이$\}$

라 하고 a_n을 집합 A_n의 원소의 개수라 하자. 예를 들어 $a_4 = 1$이다. $\sum_{n=4}^{25} a_n$의 값은? [3점]

① 140 ② 138 ③ 136
④ 134 ⑤ 132

06 부분별로 일반항을 찾아 수열의 합

모든 항을 나타내는 일반항을 구할 수 없는 경우 다음 단계로 일반항을 구한다.
[1단계] 같은 규칙을 가진 부분으로 나누어 부분별로 일반항을 구한다.
[2단계] 홀수항, 짝수항으로 나누어 일반항을 구할 때,
$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$을 이용하여 구한다.

필수문제 12 부분별로 일반항을 찾아 수열의 합 구하기

36. 그림과 같이 나무에 55개의 전구가 맨 위 첫 번째 줄에는 1개, 두 번째 줄에는 2개, 세 번째 줄에는 3개, $\cdots$, 열 번째 줄에는 10개가 설치되어 있다. 전원을 넣으면 이 전구들은 다음 규칙에 따라 작동한다.

(가) n이 10 이하의 자연수일 때, n번째 줄에 있는 전구는 n초가 되는 순간 처음 켜진다.
(나) 모든 전구는 처음 켜진 후 1초 간격으로 꺼짐과 켜짐을 반복한다.

전원을 넣고 n초가 되는 순간 켜지는 모든 전구의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 6$, $a_{11} = 25$이다. $\sum_{n=1}^{14} a_n$의 값은? [3점]

① 215 ② 220 ③ 225
④ 230 ⑤ 235

07 $\sum$가 연달아 나오는 식의 계산

$\sum$를 여러 개 포함한 식의 계산
안쪽에 있는 $\sum$부터 차례로 풀어가되 문자에 주의하여 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별한다.

$\sum_{k=1}^{n} km$ 다른 문자: 상수 취급

$\sum_{l=1}^{n} (m+l)$ 다른 문자: 상수 취급

필수문제 13 $\sum$가 연달아 나오는 식의 계산

[교육청]

37. $\sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=2}^{12} k^2 + \sum_{k=3}^{12} k^2 + \cdots + \sum_{k=12}^{12} k^2$의 값은? [4점]

① 3376 ② 4356 ③ 5324
④ 5840 ⑤ 6084

필수문제 14 $\sum$가 연달아 나오는 식의 계산

38. 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

| 보 기 |

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2}{n(n+1)}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} l \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08 분수 꼴의 수열의 합

(1) 일반항이 분수 꼴인 수열의 합 구하는 방법

[1단계] 수열 $\{a_n\}$의 제k항 a_k를 부분분수로 변형한다.

⇨ $a_k=\dfrac{1}{(k+a)(k+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{k+a}-\dfrac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

[2단계] $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 차례대로 대입하여 주어진 식을 구한다.

[참고] 연이어 소거되는 수열의 합

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+2})=a_1+a_2-a_{n+1}-a_{n+2}$

(2) 자주 사용되는 분수 꼴의 수열의 합

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{n}{n+1}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right\}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

(3) 일반항이 분모가 무리식인 분수 꼴이면 분모를 유리화한다.

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$

개념 CHECK

39. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

40. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{7}{10}$
④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

41. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고 모든 자연수 n에 대하여

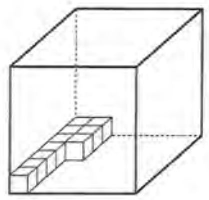
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

필수문제 15 항을 나열하여 규칙을 찾는 수학적 귀납법

27. 한 변의 길이가 70 cm인 정육면체 모양의 상자에 한 변의 길이가 10 cm인 정육면체 모양의 나무 블록을 다음 규칙에 따라 빈틈없이 가득 채우려고 한다.



> n번째에 넣는 나무 블록의 개수를 a_n이라 할 때,
> (가) $a_1=10$
> (나) $a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]+3,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$
> (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)
> (다) 상자를 가득 채우면 나무 블록 넣기를 멈춘다.

k번째에 상자를 가득 채웠다고 할 때, k의 값을 구하시오.
(단, 상자의 두께는 무시한다.) [4점]

필수문제 16 항을 나열하여 규칙을 찾는 수학적 귀납법

28. 다음은 19세기 초 조선의 유학자 홍길주가 소개한 제곱근을 구하는 계산법의 일부를 재구성한 것이다.

> 1보다 큰 자연수 p에서 1을 뺀 수를 p_1이라 한다.
> p_1이 2보다 크면 p_1에서 2를 뺀 수를 p_2라 한다.
> p_2가 3보다 크면 p_2에서 3을 뺀 수를 p_3이라 한다.
> $\vdots$
> p_{k-1}이 k보다 크면 p_{k-1}에서 k를 뺀 수를 p_k라 한다.
> 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 수 p_n이 $(n+1)$보다 작으면 이 과정을 멈춘다.
> 이때 $2p_n$이 $(n+1)$과 같으면 p는 $\boxed{(가)}$이다.

$\boxed{(가)}$에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4점]

① $n+1$ ② $\dfrac{(n+1)^2}{2}$ ③ $\left\{\dfrac{(n+1)}{2}\right\}^2$
④ 2^{n+1} ⑤ $(n+1)!$

필수문제 32 홀수와 짝수에 따라 다르게 정의된 수열의 귀납적 정의

46. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고, $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

08 $a_{n+1}=pa_n+q$의 귀납적

$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1,\ q\neq 0)$꼴에서 일반항 a_n을 구할 때,

[1단계] $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)\ \left(\alpha=\dfrac{q}{1-p}\right)$꼴로 변형한다.

[2단계] 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p인 등비수열

⇨ $a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}$

개념 CHECK

47. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2$$

일 때, a_{10}의 값은?

① 1022 ② 1024 ③ 2021
④ 2046 ⑤ 2082

필수문제 33 $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴 귀납적 정의

48. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=2$이고 $n\geq 1$일 때, a_{n+1}은

$$\frac{1}{n+2}<\frac{a_n}{k}<\frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k의 개수이다. a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

---

09 **피보나치 수열**

수열 $\{a_n\}$이 점화식 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시키면 이 수열을 피보나치의 수열이라고 한다.
특히 일반항을 찾기 어려운 문제에서 피보나치 수열을 염두에 두고 접근하면 쉽게 n항의 값(경우의 수)을 구할 수 있다.
예를 들어 $a_1=1,\ a_2=1$이면 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

필수문제 34 피보나치 수열

49. 자연수 n에 대하여 세 문자 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$를 중복을 허락하여 만든 n자리 문자열 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 문자열의 개수를 a_n이라 하자.

(가) 같은 문자가 연속하여 나올 수 없다.
(나) A의 바로 뒤에 B는 나올 수 없다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$을 만족시킬 때, a_6의 값은? [3점]

① 22 ② 26 ③ 30
④ 34 ⑤ 38

필수문제 35 피보나치 수열

50. 어떤 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지의 상태 a, b, c로 바뀐다. 이때 다음 규칙이 적용된다고 하자.

> [규칙1] 에너지가 증가하면 b상태의 전자는 c상태로 올라가고, a상태의 전자 중 일부는 b상태로 나머지는 c상태로 올라간다.
> [규칙2] 에너지가 감소하면 b상태의 전자는 a상태로 내려가고, c상태의 전자 중 일부는 b상태로 나머지는 a상태로 내려간다.

[1단계]에서 전자는 a상태에 있다. 에너지가 증가하여 [2단계]가 되면 이 전자는 b상태 또는 c상태가 된다. 이때 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경로는 $a \to b$와 $a \to c$의 2가지이다.
다시 에너지가 감소하여 [3단계]가 된다. 이때까지의 가능한 변화 경로는 $a \to b \to a$, $a \to c \to b$, $a \to c \to a$의 3가지이다.
이와 같이 에너지의 증가와 감소가 교대로 계속될 때, [1단계]에서 [7단계]까지의 전자의 가능한 변화 경로의 수를 구하면? [4점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

2. 빈칸추론

01 일반항을 구하는 빈칸추론

주어진 과정의 순서를 따라가며 빈칸 추론하기
수학적 귀납법을 이용한 주어진 조건에 맞는 일반항을 구하는 과정에서 빈칸 채우는 형식

필수문제 36 일반항을 구하는 빈칸추론

51. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$이고

$$na_{n+1} - 2na_n + \frac{n+2}{n+1} = 0 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n = 2^n + \frac{1}{n} \qquad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=3$, (우변)$=2^1+\frac{1}{1}=3$이므로
> $(*)$이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $a_k = 2^k + \frac{1}{k}$이므로
> $$ka_{k+1} = 2ka_k - \frac{k+2}{k+1}$$
> $$= \boxed{\quad (가) \quad} - \frac{k+2}{k+1}$$
> $$= k \cdot 2^{k+1} + \boxed{\quad (나) \quad}$$
> 이다. 따라서 $a_{k+1} = 2^{k+1} + \frac{1}{k+1}$이므로
> $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n = 2^n + \frac{1}{n}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$이라 할 때, $f(3) \times g(4)$의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

필수문제 47 일반항을 구하는 빈칸추론

62. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고

$$a_{n+1}=n+1+\frac{(n-1)!}{a_1a_2\cdots a_n}\quad(n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_1a_2\cdots a_na_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!$$
> 이다. $b_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}$이라 하면 $b_1=1$이고
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{\text{(가)}}$$
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
> $b_n=\boxed{\text{(나)}}$이므로
> $\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> $\vdots$
> 따라서 $a_1=1$이고 $a_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n-3}\quad(n\ge 2)$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(13)\times g(7)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{1}{77}$ ③ $\frac{1}{84}$
④ $\frac{1}{91}$ ⑤ $\frac{1}{98}$

필수문제 48 일반항을 구하는 빈칸추론

63. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$a_{n+1}=(n+1)S_n+n!\quad(n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 주어진 식에 의하여
> $$S_{n+1}=(n+2)S_n+n!\quad(n\ge 1)$$
> 이다. 양변을 $(n+2)!$로 나누면
> $$\frac{S_{n+1}}{(n+2)!}=\frac{S_n}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
> 이다. $b_n=\dfrac{S_n}{(n+1)!}$이라 하면 $b_1=\dfrac{1}{2}$이고
> $$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
> $$b_n=\frac{\boxed{\text{(가)}}}{n+1}$$
> 이므로
> $$S_n=\boxed{\text{(가)}}\times n!$$
> 이다. 그러므로
> $$a_n=\boxed{\text{(나)}}\times(n-1)!\quad(n\ge 1)$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(7)+g(6)$의 값은? [4점]

① 44 ② 41 ③ 38
④ 35 ⑤ 32

CONTENTS

인피니트수학연구소

1. 함수의 극한

01 그래프에서 함수의 극한값

(1) 극한값의 존재조건

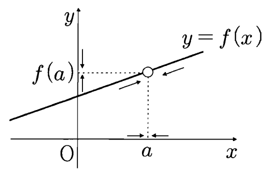
함수 $f(x)$에서 우극한 $\lim_{x\to a+}f(x)$와 좌극한 $\lim_{x\to a-}f(x)$가 모두 존재하고 그 값이 서로 같으면 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$ 가 존재한다.

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=\alpha$$

[참고] $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ ⋯ 극한값 : 근접하는(가까워지는) 점의 y좌표

(2) 함숫값과 극한값

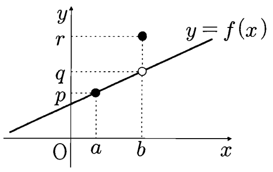
① 함숫값 $f(a)$가 존재하지 않더라도 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$는 존재할 수 있다.



② 극한값은 함숫값과 같을 수도 있고 다를 수도 있다.

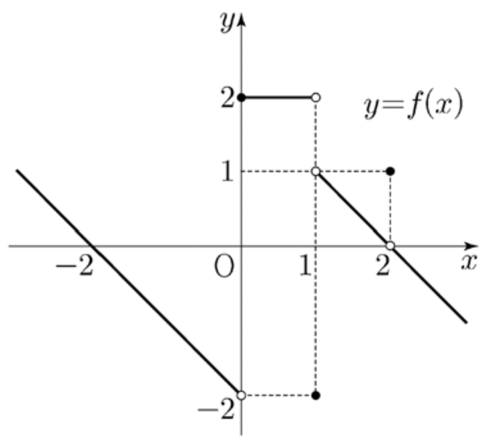
(i) $x=a$에서 $f(a)=p$, $\lim_{x\to a}f(x)=p$이므로 함숫값과 극한값이 같다.

(ii) $x=b$에서 $f(b)=r$, $\lim_{x\to b}f(x)=q$이므로 함숫값과 극한값이 서로 다르다.



개념 CHECK

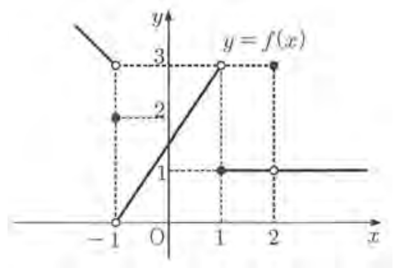
1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

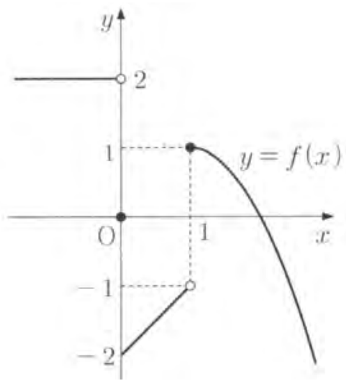
2. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 2}f(x)$의 값은 [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

필수문제 8 $0/0$ 꼴의 유리함수의 극한값

32. 극한 $\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=4$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 보기에서 모두 고른 것은? [3점]

| 보 기 |

ㄱ. $f(x)=4|x|$
ㄴ. $f(x)=2x^2+2x$
ㄷ. $f(x)=x+\frac{4}{x}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 $0/0$ 꼴의 무리함수의 극한값

분모 또는 분자에 근호가 포함된 식이 있을 때,
⇨ 분모 또는 분자에 근호가 있는 쪽을 먼저 유리화한 후 약분한다.
[참고] 극한값 계산

형태	극한값
① $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한	분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눈다.
② $\infty\times a$, $\frac{\infty}{a}$의 꼴 극한	$a>0$이면 $+\infty$, $a<0$이면 $-\infty$
③ $\frac{a}{\infty}$의 꼴 극한	0
④ $\frac{a}{0}$의 꼴 극한	$a>0$일 때, 분모 $\to+0$이면 $+\infty$, -0이면 $-\infty$ $a<0$일 때, 분모 $\to+0$이면 $-\infty$, -0이면 $+\infty$

개념 CHECK

33. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$의 값은? [2점]

① 0 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

34. $\lim_{x\to0}\frac{20x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$의 값을 구하시오. [3점]

02 함수의 연속과 미정계수의 결정

구간에 따라 쪼개진 함수의 연속성 조사는 경계점을 주목한다.

① $x \neq a$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여

$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \neq a) \\ b & (x=a) \end{cases}$ 일 때, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서

연속이려면 ⇨ $\lim_{x \to a} g(x)=b$

② $x<a$에서 연속인 함수 $f(x)$와 $x \geq a$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 ⇨ $\lim_{x \to a-} f(x)=g(a)$

개념 CHECK

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x \leq a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x \leq -1) \\ x^2-5x-a & (x>-1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-4 & (x<a) \\ x+3 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x \leq 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1) \end{cases}$$

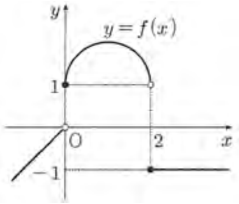
이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

03 그래프로 주어진 함수의 연속

그래프로 주어진 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 연속이거나 불연속인 함수가 주어질 때, 그 함수들의 합, 차, 곱
즉, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$의 $x=a$에서의 연속성을 따질 때도 함숫값과 극한값을 비교해야 한다.

필수문제 7 그래프로 주어진 함수의 연속

22. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

| 보 기 |

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=-1$

ㄷ. 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 8 그래프로 주어진 함수의 연속

23. 함수 $f(x)$에 대하여 불연속점의 개수를 $\mathrm{N}(f)$로 나타내자.

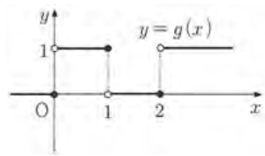
예를 들면 $f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ 이면 $\mathrm{N}(f)=1$이다.

다음 두 함수 $g(x)$, $f(x)$에 대하여

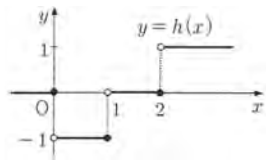
$$a_1=\mathrm{N}(g+h),\ a_2=\mathrm{N}(gh),\ a_3=\mathrm{N}(|h|)$$

라 할 때, a_1, a_2, a_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?
(단, $(g+h)(x)=g(x)+h(x)$, $(gh)(x)=g(x)h(x)$, $|h|(x)=|h(x)|$ 이다.) [3점]

$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ 1 & (0<x\le 1)\\ 0 & (1<x\le 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$



$h(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ -1 & (0<x\le 1)\\ 0 & (1<x\le 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$



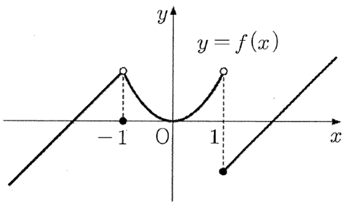
① $a_1=a_2=a_3$　② $a_1<a_2=a_3$　③ $a_1=a_3<a_2$
④ $a_2<a_1=a_3$　⑤ $a_3<a_1=a_2$

필수문제 13 $f(x)+|f(x)|$, $f(x)+f(-x)$의 연속

28. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 0 & (x=-1) \\ x^2 & (-1<x<1) \\ x-2 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



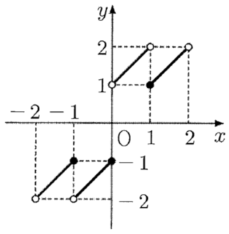
| 보 기 |

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}\{f(x)+f(-x)\}=0$
ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개다.
ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a는 없다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 14 $f(x)+|f(x)|$, $f(x)+f(-x)$의 연속

29. 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$

로 정의할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재한다.
ㄴ. $\lim_{x\to 0}g(x)$가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

05 함수의 주기성과 연속성

두 연속인 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키고

구간 $[a, c]$에서 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (a \le x < b) \\ h(x) & (b \le x < c) \end{cases}$로 정의하면 다음 단계를 이용하여 미지수를 구한다.

[1단계] $x=b$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x \to b-} g(x)=\lim\limits_{x \to b+} h(x)=h(b)$

[2단계] $f(x+p)=f(x)$를 만족시키므로

$$\lim_{x \to a+} g(x)=\lim_{x \to c-} h(x)=g(a)$$

← 한 주기의 끝과 다음 주기의 시작이 연속이어야 한다.

필수문제 15 함수의 주기와 연속성

30. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & (-1 \le x < 0) \\ 3x^2+2ax+b & (\ 0 \le x < 1) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

필수문제 16 함수의 주기와 연속성

31. 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ 1]$에서
$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$이고, 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x+2)$이다. $a>1$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} x & (x \ne 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$$

일 때, 합성함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=1$에서 연속이다.
a의 최솟값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

02 곱과 몫이 $x=a$에서 연속일 조건

$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x \geq a) \\ f_2(x) & (x < a) \end{cases}$와 $g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x \geq a) \\ g_2(x) & (x < a) \end{cases}$에 대하여

① 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$

② 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 $x=a$에서 연속이면 $\Rightarrow \lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{g(a)}{f(a)}$

필수문제 26 곱과 몫이 $x=a$에서 연속일 조건

42. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1,\ x=2$에서 불연속이다.

(나) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 4$

$f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

필수문제 27 곱과 몫이 $x=a$에서 연속일 조건

43. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases},$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

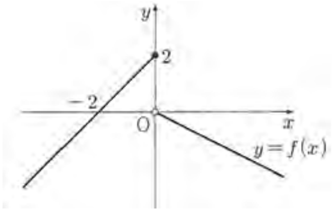
① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

필수문제 28 곱과 몫이 $x=a$에서 연속일 조건

44. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x & (x > 0) \end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.

함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [3점]



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

필수문제 29 곱과 몫이 $x=a$에서 연속일 조건

45. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} a & (x \le 1) \\ -x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?
(단, a는 상수이다.) [3점]

| 보 기 |

ㄱ. $\lim_{x \to 1+} f(x)=1$
ㄴ. $a=0$이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 교점의 개수에 대한 연속

01 두 그래프의 교점에서 연속의 활용

[1단계] 조건을 만족하는 그래프를 그린다.
[2단계] 범위에 따른 실근을 만족하는 함수식을 작성한다.
[3단계] 극한값과 연속 조건을 만족하는 것을 찾는다.

필수문제 38 두 그래프의 교점에서 연속의 활용

54. 실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

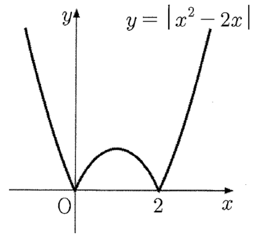
| 보 기 |

ㄱ. $\lim_{a \to 0} f(a) = f(0)$
ㄴ. $\lim_{a \to c+} f(a) \neq \lim_{a \to c-} f(a)$인 실수 c는 2개이다.
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 39 두 그래프의 교점에서 연속의 활용

55. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. [4점]



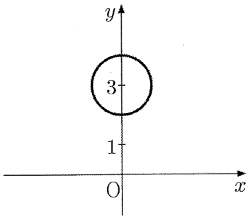
확인유제

56. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 1-} f(t)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

필수문제 40 두 그래프의 교점에서 연속의 활용

57. 좌표평면에서 중심이 $(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



| 보 기 |

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r \to 1+} f(r) = f(1)$

ㄷ. 열린 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 미분계수

01 평균변화율과 미분계수

(1) 평균변화율
① 평균변화율의 정의
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\Delta x=b-a)$$

② 평균변화율의 기하학적 의미
곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같음을 알 수 있다.

(2) 미분계수
① 미분계수의 정의 : $x=a$에서의 평균변화율의 극한값 (순간변화율 또는 미분계수)라 하고 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

② 미분계수의 기하학적 의미
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다

개념 CHECK

1. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

2. 함수

$$f(x)=x^3-3x^2+5x$$

에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균 변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.[4점]

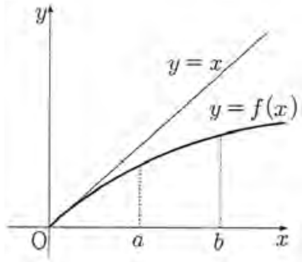
3. 함수 $f(x)$가

$$f(x+2)-f(2)=x^3+6x^2+14x$$

를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 3 평균변화율과 미분계수

6. 다음 그림은 미분가능한 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다. $0<a<b$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



| 보 기 |

ㄱ. $\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$

ㄴ. $f(b)-f(a)>b-a$

ㄷ. $f'(a)>f'(b)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

02 미분계수와 도함수(1)

$f(x)$가 미분가능한 함수일 때

$$\lim_{\square\to0}\frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}=f'(a)$$

① $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

② $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{mh}=\frac{n}{m}f'(a)$

③ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$

개념 CHECK

7. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

8. 함수 $f(x)=x^2+8x$에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값은? [3 점]

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

05 구간에 따른 함수의 미분가능성

$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능할 조건

[1단계] $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속 $\Rightarrow g(a)=h(a)$

[2단계] $x=a$에서 미분계수가 존재 $\Rightarrow g'(a)=h'(a)$

[방법 1] 미분계수의 정의를 활용하는 경우

[방법 2] 미분법을 활용하는 경우

개념 CHECK

32. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

33. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x \leq -2) \\ 2x & (x > -2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

34. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

35. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

36. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx & (x \geq 1) \\ 2x^2+1 & (x<1) \end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 미분가능하도록 상수 a, b를 정할 때, ab의 값은? [3점]

① -5 ② -3 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

필수문제 1 다항함수의 증가와 감소

4. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은? [4점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

필수문제 2 다항함수의 증가와 감소

5. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

03 극대 극소를 이용한 미정계수의 결정

미분 가능한 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값 b 를 가지면
$\Rightarrow f(a)=b,\ f'(a)=0$
임을 이용하여 미지수를 구한다.

개념 CHECK

19. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고 $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

20. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

22. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=x^4+kx+10$$

이 $x=1$에서 극값을 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$$

이 $x=3$에서 극대일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

24. 함수 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$이 $x=b$와 $x=2-2b$에서 극대일 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 $a>0$, $b>1$인 상수이다.) [3점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

25. 함수 $f(x)=x^3-3x+a$의 극댓값이 7일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

필수문제 13 극대 극소를 이용한 미정계수의 결정

34. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
(나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

04 x 축에 접하는 다항함수의 그래프

① 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접한다.
⇨ 함수 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 0이다.
② 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축에 접하면
⇨ $f(a)=f'(a)=0$
⇨ $f(x)=k(x-a)^2(x-b)$ (단, $a\neq b$, $k\neq 0$)
③ 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)=b$ 이면
⇨ $f(x)-b$ 는 $x-a$ 의 인수를 갖는다.
④ 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)=b$ 이고, $f'(a)=0$ 이면
⇨ $f(x)-b$ 는 $(x-a)^2$ 의 인수를 갖는다.

필수문제 14 x 축에 접하는 다항함수의 그래프

35. 삼차함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여

$$f(a)=f(b)=0,\ f'(a)=f'(c)=0$$

을 만족시킨다. c를 a와 b로 나타내면? [3점]

① $a+b$　② $\frac{a+b}{2}$　③ $\frac{a+b}{3}$
④ $\frac{a+2b}{3}$　⑤ $\frac{2a+b}{3}$

필수문제 15 x 축에 접하는 다항함수의 그래프

36. 삼차함수 $y=x^3-3ax^2+4a$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, 양수 a 의 값은? [3 점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

05 삼차함수가 극값을 가질 조건

삼차함수 $y=f(x)$ 에 대하여
① $f(x)$가 극값을 가질 조건
⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다. $(D>0)$
② $f(x)$가 극값을 갖지 않을 조건
⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가진다. $(D\le 0)$

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 극값을 갖지 않을 조건
⇔ 증가함수 또는 감소함수
⇔ 일대일 함수일 조건
: $x_1\ne x_2$ 이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$ 인 함수가 될 조건
⇔ 일대일대응일 조건
⇔ 역함수를 가질 조건
⇔ 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식 $D\le 0$

필수문제 16 삼차함수가 극값을 가질 조건

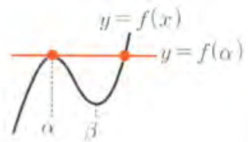
37. 삼차함수 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+1$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는? [3 점]

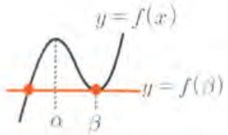
① $-1\le a\le 2$ ② $0\le a\le 3$ ③ $1\le a\le 4$
④ $2\le a\le 5$ ⑤ $3\le a\le 6$

06 방정식 $f(x)=f(\alpha)$ 의 실근의 활용

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $x=\alpha$ 에서 극대, $x=\beta$ 에서 극소라 하면

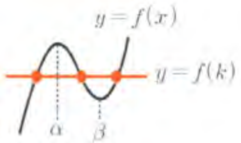
① 방정식 $f(x)=f(\alpha)$ 와 $f(x)=f(\beta)$ 는 서로 다른 두 실근을 가진다.





② 방정식 $f(x)=f(k)$가 서로 다른 세 실근을 가지려면

⇨ 상수함수 $y=f(k)$ 는 $f(\beta)<f(k)<f(\alpha)$ 이어야 한다.



필수문제 17 방정식 $f(x)=f(\alpha)$ 의 실근의 활용

38. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$ 에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. 도함수 $f'(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$ 에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$ 를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 18 방정식 $f(x)=f(\alpha)$ 의 실근의 활용

39. 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 항상 지나는 점들의 y 좌표의 합을 구하시오.

(가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이다.
(나) 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2,\ f(2))$ 에서 직선 $y=2$ 에 접한다.
(다) $f'(0)=0$

07 대칭성을 갖는 함수의 극대 극소

다항함수 $f(x)$에 대하여

① $f(-x)=f(x)$

⇨ 다항함수 $f(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$는 우함수

⇨ $f(x)$의 차수가 짝수인 항 또는 상수항의 합으로 놓는다.

⇨ $f'(-x)=-f'(x)$

⇨ 다항함수 $y=f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 원점을 반드시 지나므로 $f'(0)=0$이다.

② $f(-x)=-f(x)$

⇨ 다항함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(x)$는 기함수

⇨ $f(0)=0$

⇨ $f(x)$의 차수가 홀수인 항의 합으로 놓는다.

⇨ $f'(-x)=f'(x)$ (역은 성립하지 않는다.)

③ $f(a-x)=f(b+x)$

⇨ 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대칭인 함수이다.

개념 CHECK

40. 삼차함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖고, 그 그래프가 원점에 대하여 대칭일 때, 이 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 중에서 양수인 것은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

필수문제 19 대칭성을 갖는 함수의 극대 극소

41. 모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=5$
(다) $1<f'(1)<7$

함수 $y=f(x)$의 극댓값은 m이다. m^2의 값을 구하시오. [3점]

필수문제 20 대칭성을 갖는 함수의 극대 극소

42. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.
(나) 함수 $f(x)$ 는 극솟값 -10 을 갖는다.

필수문제 21 대칭성을 갖는 함수의 극대 극소

43. x 에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$ 가 서로 다른 세 실근 α, β, γ 를 가진다. 실수 k 에 대하여 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하시오. [4점]

필수문제 37 두 다항함수의 도함수 활용

62. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다. (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

3. 함수의 최대 최소

01 다항함수의 최대 최소

(1) 최대 최소의 정의
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 다항함수의 최댓값과 최솟값
다항함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 극값을 가질 때
① $f(x)$의 최댓값 : 극댓값과 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 최대인 것이다.
② $f(x)$의 최솟값 : 극솟값과 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 최소인 것이다.

개념 CHECK

63. 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x+5$의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

64. 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=20$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

65. 구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$의 최댓값을 구하시오. [3점]

필수문제 38 다항함수의 최대 최소

66. 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 $x=a$와 $x=b$에서 만나고 $a<c<b$인 $x=c$에서 두 함숫값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은? [3점]

① $f'(c)=-g'(c)$ ② $f'(c)=g'(c)$
③ $f'(a)=g'(b)$ ④ $f'(b)=g'(b)$
⑤ $f'(a)=g'(a)$

필수문제 39 다항함수의 최대 최소

67. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오. [4점]

02 최대 최소의 활용

함수의 최대・최소의 활용 문제는 도형의 길이, 넓이나 부피와 관련된 것들이 대부분이다. 이러한 문제들을 해결하는 방법은 다음과 같다.

[1단계] 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 그 값의 범위를 구한다.

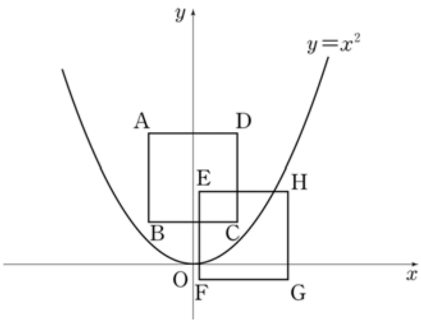
[2단계] 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수 $f(x)$로 나타낸다.

[3단계] 함수의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감과 극대・극소를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 구한다. (경계값과 극값 비교)

필수문제 40 최대 최소의 활용

68. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은?

(단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다.) [4점]

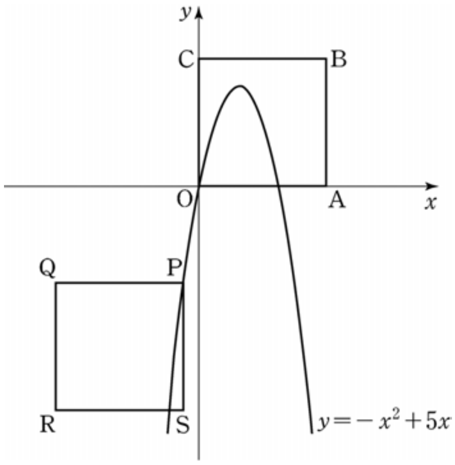


① $\frac{4}{27}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{5}{27}$
④ $\frac{11}{54}$　⑤ $\frac{2}{9}$

변형문제

69. 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 O$(0,\ 0)$, A$(8,\ 0)$, B$(8,\ 8)$, C$(0,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다. 점 P가 점 $(-1,\ -6)$에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동 시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



18. 두 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-k,\ \ g(x)=2x^2+3x-10$$

에 대하여 부등식

$$f(x)\geq 3g(x)$$

가 닫힌 구간 $[-1,\ 4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

2006학년도 06월 평가원 가형 24번

19. 두 함수 $f(x)=5x^3-10x^2+k,\ \ g(x)=5x^2+2$가 있다. $\{x\,|\,0<x<3\}$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오. [4점]

필수문제 6 부등식과 미분

20. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

필수문제 7 부등식과 미분

2005학년도 09월 평가원 나형 12번

21. 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\le 1)\\ x^3 & (x>1)\end{cases}$$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge k(x-1)+1$이 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

필수문제 8 부등식과 미분

22. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le k)\\ 12(x-k) & (x>k)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$이 일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.

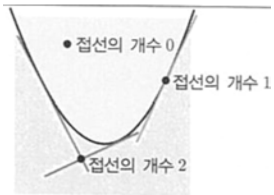
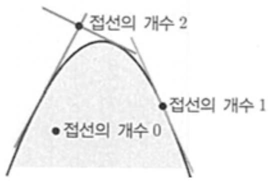
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2. 곡선 밖의 점에서 접선의 개수

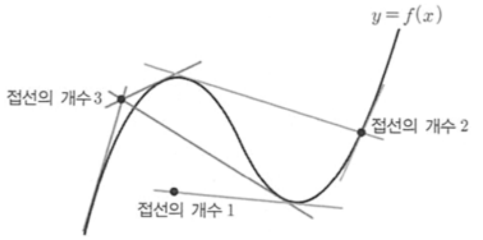
01 곡선 밖의 점에서 접선의 개수

[1단계] 곡선 위의 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하여 접선의 방정식을 구한다.
[2단계] [1단계]에서 구한 접선이 곡선 밖의 점을 대입하여 삼차방정식을 유도한다.
[3단계] (방정식의 실근의 개수)=(접점의 개수)=(접선의 개수)임을 이용하여 실수 a의 값의 범위를 구한다.

[Key Point] 곡선 밖의 점에서 접선의 개수

아래로 볼록인 함수	위로 볼록인 함수
	

삼차함수에 그을 수 있는 접선의 개수



필수문제 9 곡선 밖의 점에서 접선의 개수

23. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
> (나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
> (다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, $a,\ b$는 유리수이다.) [4점]

필수문제 10 곡선 밖의 점에서 접선의 개수

24. 실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [4점]

① -3　② $-\frac{3}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 6

3. 속도와 가속도

01 수직선 위의 운동에서 속도와 가속도

(1) 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$의 순간변화율을 시각 t에서 점 P의 속도 v라 한다.

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

또, 속도의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라고 한다.

(2) 점 P의 시각 t에서의 속도 $v=f'(t)$의 순간변화율을 시각 t에서 점 P의 가속도 a라 한다.

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=f''(t)$$

(3) 위치 $x=0$일 때 조건
① 땅에 떨어질 때
② 원래 위치로 돌아올 때

(4) 속도 $v=0$일 때 조건
① 최고 높이에 도달할 때
② 운동방향을 바꿀 때
③ 운동이 정지할 때

개념 CHECK

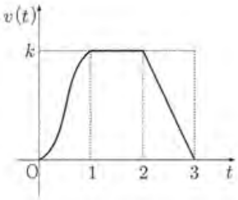
25. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 x가

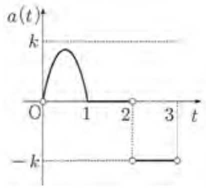
$$x=t^3-5t^2+6t$$

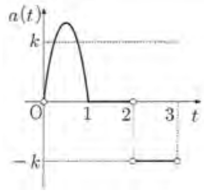
이다. $t=3$에서 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

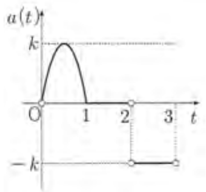
필수문제 15 수직선 위의 운동에서 속도와 가속도

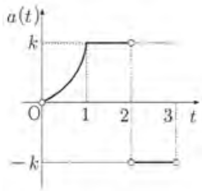
35. 오른쪽 그림은 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프이다. $v(t)$는 $t=2$를 제외한 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능한 함수이고, $v(t)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 원점과 점$(1,\ k)$를 잇는 직선과 한 점에서 만난다. 점 P의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$를 나타내는 그래프의 개형으로 가장 알맞은 것은? [3점]

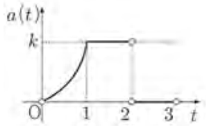


①


②


③


④


⑤


필수문제 16 수직선 위의 운동에서 속도와 가속도

36. 두 자동차 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여 직선 도로를 한 방향으로만 달리고 있다. t초 동안 A, B가 움직인 거리는 각각 미분 가능한 함수 $f(t)$, $g(t)$로 주어지고, 다음이 성립한다고 한다. [3점]

> (가) $f(20)=g(20)$
> (나) $10 \le t \le 30$에서 $f'(t)<g'(t)$

이로부터, $10 \le t \le 30$에서의 A와 B의 위치에 관한 다음 설명 중 옳은 것은?

① B가 항상 A의 앞에 있다.
② A가 항상 B의 앞에 있다.
③ B가 A를 한 번 추월한다.
④ A가 B를 한 번 추월한다.
⑤ A가 B를 추월한 후 B가 다시 A를 추월한다.

1. 부정적분

01 부정적분의 정의

(1) 부정적분
함수 $f(x)$에 대하여 $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분 또는 원시함수라 하고 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.
(2) $F'(x)=f(x)$일 때, $\int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)
① $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\{F(x)+C\}=f(x)$
② $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\int f'(x)dx=f(x)+C$

개념 CHECK

[교육청]
1. 함수 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx$에 대하여 $f(x)$의 최솟값이 8일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

필수문제 1 부정적분의 정의

2. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx,\ f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

변형문제 _[교육청]
3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\int xg(x)\,dx,\ \frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]
① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

02 부정적분의 성질

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① 상수의 적분 $\int kdx = kx + C$

② x^n의 적분 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

③ 상수배의 적분 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

④ 합과 차의 적분

$$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

⑤ $\int \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int f_k(x)dx$

⑥ 합성함수의 적분

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} \times \frac{1}{a} + C$$

개념 CHECK

4. 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x + 1\right)dx - \int \left(\frac{1}{2}x^3 + x\right)dx$$

이고 $f(0) = 1$일 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$
④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

03 도함수 $f'(x)$에서 $f(x)$ 구하기

[1단계] $f(x) = \int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

[2단계] 1단계에서 구한 $f(x)$에 주어진 함숫값을 대입하여 적분상수를 구하거나 $f'(x)$의 증감표를 이용하여 극값을 구한다.

개념 CHECK

5. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 4x^3 - 2x$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

6. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2 - 4x + 3$이고 $f(1) = 5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

7. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 + 6x^2$이고 $f(0) = -1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

1. 정적분

01 다항함수의 정적분 계산

(1) 정적분의 계산

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)$의 한 부정적분을 $\mathrm{F}(x)$라고 할 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

(2) 정적분의 기본정리

① $\int_a^a f(x)dx = 0$ (아래끝과 위끝이 같을 때)

② $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (아래끝과 위끝이 서로 바뀔 때)

③ $a > 0$일 때, 이차함수

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha < \beta)$에 대하여

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

개념 CHECK

1. $\int_0^2 (3x^2 + 6x)dx$의 값은? [3점]

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

2. $\int_0^2 (3x^2 + 2x)dx$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

3. $\int_0^a (3x^2 - 4)dx = 0$을 만족시키는 양수 a의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

4. $\int_0^2 (6x^2 - x)dx$ 의 값은? [3 점]

① 15 ② 14 ③ 13
④ 12 ⑤ 11

5. $\int_0^3 (x^2 - 4x + 11)dx$ 의 값을 구하시오. [3 점]

6. $\int_0^1 (2x + a)\,dx = 4$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3 점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02 적분구간이 같은 경우 정적분의 계산

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 정적분에서 적분 구간이 같으면 다음 정적분의 성질을 이용하여 하나의 정적분으로 나타내어 계산한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx$$

[참고]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\left(\int f(x)\,dx \neq \int f(t)dt\right)$$

개념 CHECK

[교육청]

18. 정적분 $\int_0^9 \frac{x^3}{x+2}dx + \int_0^9 \frac{8}{x+2}dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

03 피적분함수가 같은 경우 정적분의 계산

함수 $f(x)$ 가 실수 $a,\ b,\ c$ 를 포함한 구간에서 연속일 때, 두 정적분에서 같으면 다음 정적분의 성질을 이용하여 하나의 정적분으로 나타내어 계산한다.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$ (정적분의 분할)

필수문제 5 피적분함수가 같은 경우 정적분의 계산

19. 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $\int_0^3 f(x)dx = 3\int_0^1 f(x)dx$

ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx$

ㄷ. $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = \left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

필수문제 6 피적분함수가 같은 경우 정적분의 계산

20. 이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? [4점]

① 11 ② 10 ③ 9
④ 8 ⑤ 7

04 절댓값 기호가 있는 경우 정적분의

[1단계] 절댓값 기호 안의 식을 0으로 하는 x의 값을 경계로 적분구간을 나눈 함수의 식을 세운다.

[2단계] $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx$를 이용한다.

개념 CHECK

21. $\int_{1}^{4}(x+|x-3|)dx$의 값을 구하시오. [3점]

22. $\int_{0}^{2}|x^2(x-1)|dx$의 값은? [3점]

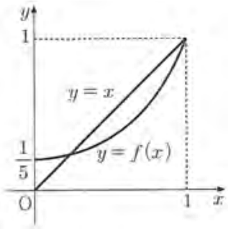
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

23. 정적분 $\int_{0}^{3}|x-1|dx$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

필수문제 10 $\int_a^b f'(x)dx$ 의 정적분의 계산

28. 오른쪽 그림은 직선 $y=x$와 다항함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이고 $f(0)=\frac{1}{5}$, $f(1)=1$일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (4점)



| 보 기 |

ㄱ. $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄴ. $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)\,dx=1$

ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$일 때, $g'(x)=1$인 x가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 11 $\int_a^b f'(x)dx$ 의 정적분의 계산

29. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. | 보기 | 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

| 보 기 |

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 12 $\int_a^b f'(x)dx$ 의 정적분의 계산

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.
ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 대칭인 함수를 이용한 정적분 계산

우함수와 기함수의 정적분의 성질
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속일 때,
이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f(-x)=f(x)$ 이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

(2) $f(-x)=-f(x)$ 이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

[참고]
$f(-x)=f(x)$ ⇨ y 축에 대하여 대칭인 함수(우함수)
: 지수가 짝수인 항들로만 이루어진 다항함수, 또는 상수함수
$y=a$(a는 상수)
예를 들어 x^2, x^4, $2x^2+1$, $\cdots$

$f(-x)=-f(x)$ ⇨ 원점에 대하여 대칭인 함수(기함수)
: 지수가 홀수인 항들로만 이루어진 다항함수
예를 들어 x, x^3, $2x^3+2x$, $\cdots$

[참고]
적분구간이 $[-a,\ a]$ 일 때, 즉 위끝, 아래끝의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 우함수, 기함수의 정적분을 이용한다.

개념 CHECK

31. $\int_{-1}^{1} (x^3+a)\,dx = 4$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

32. $\int_{-1}^{1} (x^3+3x^2+5)\,dx$ 의 값은? [3 점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

08 주기함수의 정적분의 계산

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 주기가 p인 주기함수이다.
⇨ $f(x+p)=f(x)$ ⇨ $f\left(x-\frac{p}{2}\right)=f\left(x+\frac{p}{2}\right)$

(2) 주기가 p인 주기함수 $f(x)$의 특징
① 한 주기의 정적분의 값은 항상 같다.
⇨ $\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{a+b} f(x)dx=\int_{a+p}^{a+2p} f(x)dx=\cdots$
② 구간 $[a,\ b]$의 정적분의 값은 그 구간에 주기 p만큼 더한 구간 $[a+p,\ b+p]$의 정적분의 값과 항상 같다.
⇨ $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx=\int_{a+2p}^{b+2p} f(x)dx=\cdots$

(3) 선대칭 함수
① $f(a+x)=f(a-x)$ ⇦ $f(x)=f(2a-x)$등으로 표현
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.
② $f(a+x)=f(b-x)$
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{a+b}{2}$에 대칭

필수문제 18 주기함수의 정적분의 계산

2006학년도 09월 평가원 가형 8번

41. 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $-2 \le x \le 2$일 때, $f(x)=x^3-4x$
(나) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$

정적분 $\int_1^2 f(x)\,dx$와 같은 것은? [4 점]

① $\int_{2004}^{2005} f(x)\,dx$　② $-\int_{2004}^{2005} f(x)\,dx$
③ $\int_{2005}^{2006} f(x)\,dx$　④ $-\int_{2005}^{2006} f(x)\,dx$
⑤ $\int_{2006}^{2007} f(x)\,dx$

필수문제 19 주기함수의 정적분의 계산

42. 연속함수 $f(x)$는 임의의 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=f(x)$
> (나) $f(x)=f(x+4)$

$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 16$일 때, 정적분 $\int_{-4}^{8} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

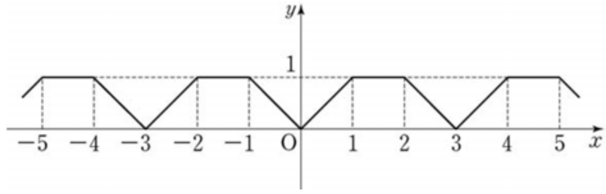
[3점]

필수문제 20 주기함수의 정적분의 계산

43. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ -x+3 & (2 \le x < 3) \end{cases}$$

이다. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 13$일 때, 상수 a의 값은? [4점]



① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

필수문제 21 주기함수의 정적분의 계산

44. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

09 두 함수에서 크거나 같은 함수 선택

$$h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$$
$$=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x))\end{cases}$$
⇦ $h(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$

필수문제 22 두 함수에서 크거나 같은 함수 선택

45. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\ge g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{29}{6}$
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

10 곡선의 모양 결정

① $y=f(x)$가 아래로 볼록하면

⇨ $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)>\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (단, $a<b$)

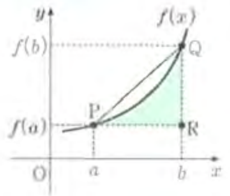
② $y=f(x)$가 위로 볼록하면

⇨ $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)<\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (단, $a<b$)

[참고]

$\displaystyle\int_a^b\{f(x)-f(a)\}dx$는

⇨ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.

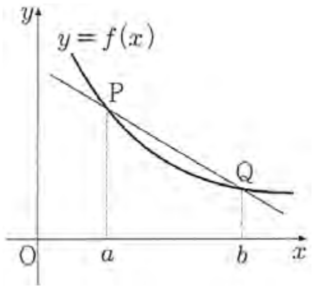


또, $\dfrac{b-a}{2}\{f(b)-f(a)\}$

⇨ △PRQ의 넓이가 된다.

필수문제 23 곡선의 모양 결정

46. 다음 그림은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 나타낸 것이다.



함수 $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. 함수 $F(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 증가한다.

ㄴ. $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^b\{f(x)-f(b)\}\,dx \le \dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 24 곡선의 모양 결정

47. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

> (가) $f(0)=0$
> (나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여
> $0<xf(y)<yf(x)$

세 수

$$A=f'(0),\ B=f(1),\ C=2\int_0^1 f(x)\,dx$$

의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

11 구간에 따른 정적분과 넓이

모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$일 때,
① 한 주기의 정적분은 모두 같다.

$$\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx=\int_c^{c+p} f(x)dx$$

② 구간에 주기의 몇 배가 더해져도 정적분 값이 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+np}^{b+np} f(x)dx$$

③ 함수를 몇 주기만큼 평행이동해도 정적분 값은 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x-np)dx$$

④ 적분 구간의 길이가 주기의 n배이면 한 주기 정적분 값의 n배이다.

$$\int_a^{a+np} f(x)dx=n\int_0^p f(x)dx$$

필수문제 25 구간에 따른 정적분과 넓이

48. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
> (나) $\int_0^6 f(x)dx=0$

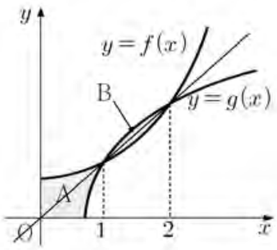
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

필수문제 23 역함수로 표현된 정적분의 계산

[교육청]

36. 그림과 같이 함수 $f(x)=ax^2+b\ (x\geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 1과 2이다. $0\leq x\leq 1$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, $1\leq x\leq 2$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. 이때 A$-$B의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

06 곡선과 접선 사이의 넓이

곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하는 순서
[1단계] 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 구한다.
즉, $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
[2단계] 곡선과 접선의 교점의 x좌표를 구하여 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

필수문제 24 곡선과 접선 사이의 넓이

[경찰대]

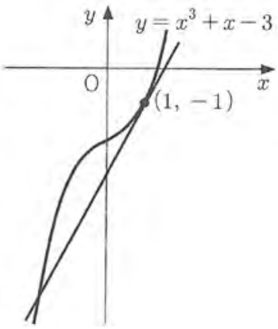
37. 곡선 $y=x^3$ 위에 있는 점 $\mathrm{A}(a,\ a^3)$에서의 접선이 이 곡선과 점 B에서 만나고, 점 B에서의 접선은 이 곡선과 점 C에서 만난다고 하자. 선분 BC와 이 곡선 사이의 넓이를 선분 AB와 이 곡선 사이의 넓이로 나눈 값은? (단, $a\neq 0$이다.) [4점]

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

필수문제 25 곡선과 접선 사이의 넓이

[사관기출]

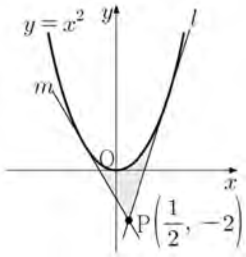
38. 그림과 같이 곡선 $y=x^3+x-3$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



필수문제 26 곡선과 접선 사이의 넓이

[경찰대]

39. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선을 $l,\ m$이라 할 때, 두 접선 $l,\ m$과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{7}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

2. 속도와 거리

01 속도와 위치의 변화량

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때,

① 시각 t에서 점 P의 위치 ⇨ $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$

② 시각 $t=a$부터 시각 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량

⇨ $\int_a^b v(t)dt$ (정적분의 값)

③시각 $t=a$부터 시각 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리

⇨ $\int_a^b |v(t)|dt$ (두 넓이의 합)

개념 CHECK

40. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-4t+k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

41. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t+5$$

이다. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

42. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-at \ \ (a>0)$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이다. 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

43. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

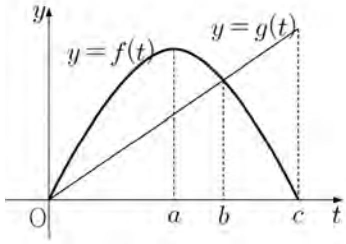
$$v(t)=2t-6$$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k\,(k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

필수문제 33 속도 그래프에서 위치와 거리

54. 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 $t\ (0 \le t \le c)$에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt$ 이고 $0 \le t \le c$ 일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

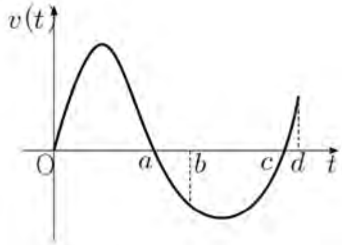
| 보 기 |

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 34 속도 그래프에서 위치와 거리

55. 다음은 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0 \le t \le d)$에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프이다.



$\int_0^a |v(t)|dt = \int_a^d |v(t)|dt$ 일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $0<a<b<c<d$이다.) [3점]

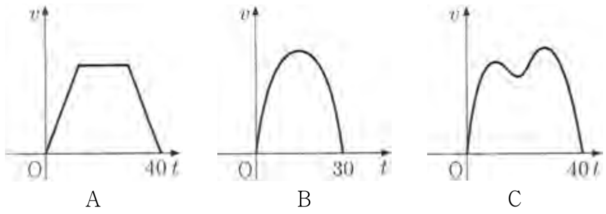
| 보 기 |

ㄱ. 점 P는 출발하고 나서 원점을 다시 지난다.
ㄴ. $\int_0^c v(t)dt = \int_c^d v(t)dt$
ㄷ. $\int_0^b v(t)dt = \int_b^d |v(t)|dt$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 35 속도 그래프에서 위치와 거리

56. 다음은'가'지점에서 출발하여'나' 지점에 도착할 때까지 직선 경로를 따라 이동한 세 자동차 A, B, C의 시간 t에 따른 속도 v를 각각 나타낸 그래프이다.



'가' 지점에서 출발하여'나'지점에 도착할 때까지의 상황에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

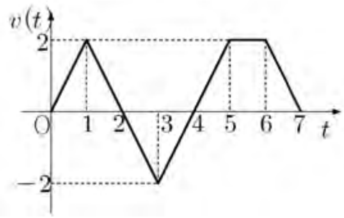
| 보 기 |

ㄱ. A와 C의 평균속도는 같다.
ㄴ. B와 C 모두 가속도가 0인 순간이 적어도 한 번 존재한다.
ㄷ. A, B, C 각각의 속도 그래프와 t축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 모두 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 36 속도 그래프에서 위치와 거리

57. 원점을 출발하여 수직선 위를 7초 동안 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$가 다음 그림과 같을 때, 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?



| 보 기 |

ㄱ. 점 P는 출발하고 나서 1초 동안 멈춘 적이 있었다.
ㄴ. 점 P는 움직이는 동안 방향을 4번 바꿨다.
ㄷ. 점 P는 출발하고 나서 4초 후 출발점에 있었다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

필수문제 37 속도 그래프에서 위치와 거리

58. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\leq t\leq 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

필수문제 38 속도 그래프에서 위치와 거리

59. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0\leq t\leq 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0\leq t<1) \\ -2t+6 & (1\leq t<3) \\ t-3 & (3\leq t\leq 5) \end{cases}$$

$0<x<3$인 실수 x에 대하여 점 P가
시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리
중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)\,dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ